Waves with friction

Computer modeling

Ewelina Kowal
Maciej Kucharski
Addrianna Saribekyan

18 stycznia 2022

Spis treści

1. Fale z oporem

2. Fale dla zmiennych napięć i gęstości

3. Assesment

Fale z oporem

W rzeczywistych warunkach drgania nie trwają wiecznie, ponieważ w prawdziwym świecie występuje zjawisko oporu. Wyobraźmy sobie strune drgającą w lepkim ośrodku takim jak powietrze. W przybliżeniu możemy założyć, że siła oporu jest skierowana w strone przeciwną do pionowej prędkości tej struny i jest ona proporcjonalna do wartości szybkości oraz długości struny:

$$F_f \simeq -2\kappa \Delta x \frac{\partial y}{\partial t} \tag{1}$$

gdzie κ to stała proporcjonalna do lepkości ośrodka w którym struna wibruje.

Fale z oporem

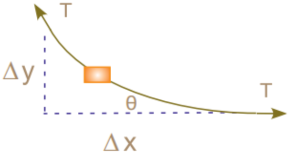
Wprowadzając wyliczoną siłę oporu (1) do równania ruchu otrzymujemy nowe równanie fali:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{2\kappa}{\rho}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{2}$$

gdzie c to szybkość rozchodzenia się zaburzenia wzdłuż fali, a ρ to gęstość ośrodka.

Fale dla zmiennych napięć i gęstości

Fale poruszają się wolniej w rejonach o dużej gęstości i szybciej w rejonach o wysokim napięciu. Jeśli gęstość wzrasta,rośnie również napięcie, aby przyspieszyć większą masę. $T \neq const$



$$\frac{\partial}{\partial x} = [T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}]\delta x = p(x)\delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + T(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = p(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

(4)

Załóżmy, że gęstość i naprężenia są proporcjonalne:

$$p(x) = p_0 e^{\alpha x}, T(x) = T_0 e^{\alpha x} \tag{5}$$

Proporjonalność jednak okazuje się tutaj jedynie przybliżeniem. Po podstawieniu do równania 4 otrzymujemy:

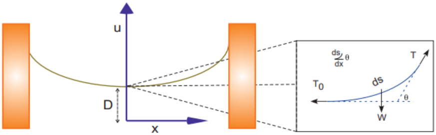
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, c^2 = \frac{T_0}{p_0} \tag{6}$$

Odpowiednie równanie różniczkowe wynika z zastosowania przybliżeń różnic centralnych dla pochodnych:

$$y_{i,j+1} = 2y_{i,j} - y_{i,j-1} \frac{\alpha c^2 (\Delta t)^2}{2\Delta x} [y_{i+1,j} - y_{i,j}] + \frac{c^2}{c'^2} [y_{i+1,j} - y_{i,j} - 2y i, j] \tag{7}$$

$$y_{i,2} = y_{i,1} + \frac{c^2}{c'^2} [y_{i+1,1} + y_{i-1,1} - 2y_{i,1}] + \frac{\alpha c^2 (\Delta t)^2}{2\Delta x} [y_{i+1,1} - y_{i,1}] \tag{8}$$

Do tego momentu ignorowaliśmy wpływ grawitacji na kształt i napięcie naszej struny, co sprawdza się gdy struna posiada nieduże ugięcie. Jeśli jednak struna jest masywna, powiedzmy, jak łańcuch lub ciężki kabel, ugięcie w środku spowodowane grawitacją może być dość duże (jak na rysunku poniżej), a wynikające z tego zmiany kształtu i naprężenia muszą zostać uwzględnione w równaniu fali.



Rys.1: Jednolita struna i wyskres rozkładania sił

Ponieważ naprężenie nie jest już jednolite, fale przemieszczają się szybciej w pobliżu końców struny, które są bardziej naprężone, ponieważ muszą utrzymać cały ciężar struny.

Pochodna kształtu krzywej łańcuchowej

Rozważmy strune o jednolitej gęstości ρ na którą działa grawitacja. Najpierw musimy rozwiązać problem w stanie statycznym i określić kształt $u(x)$ (kształt struny w stanie równowagi) oraz napięcie $T(x)$. Na rysunku (Rys.1) widać, że fragment o długości s i masie W jest równoważony przez pionową składową napięcia T. Napięcie pionowe T_0 jest natomiast równoważone przez poziomą składową T:

$$T(x)sin\Theta = W = \rho gs \wedge T(x)cos\Theta = T_0 \rightarrow tan\Theta = \frac{\rho gs}{T_0} \qquad (9)$$

Pochodna kształtu krzywej łańcuchowej

Przekształcamy równanie (9), zamieniając $tan\Theta$ na pochodną $\frac{du}{dx}$ i różniczkujemy ze względu na x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho g}{T_0} s \rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0} \frac{ds}{dx} \tag{10}$$

Podstawiając za $ds = \sqrt{dx^2 + du^2}$ otrzymujemy nasze równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{dx^2 + du^2}}{dx} = \frac{1}{D} \sqrt{1 + (\frac{du}{dx})^2} \tag{11}$$

gdzie $D = \frac{T_0}{\rho g}$ to stała wyrażana przez jednostkę długości.

Pochodna kształtu krzywej łańcuchowej

Możemy zauważyć, że równanie (11) jest równaniem krzywej łańcuchowej i jego rozwiązaniem jest:

$$u(x) = Dcosh\frac{x}{D} \tag{12}$$

Rysunek (Rys.1) ustaliliśmy tak, że $x = 0$ leży w centrum struny, $y = D$ oraz $T = T_0$. Z równania (10) wynika, że $s = D\frac{du}{dx}$.

Pochodna kształtu krzywej łańcuchowej

Podstawiając wzór (12) do tego właśnie wzoru na s otrzymujemy równanie dla $s(x)$ oraz następnie (za pomocą równania (9)) dla $T(x)$:

$$s(x) = Dsinh\frac{x}{D} \rightarrow T(x) = T_0\frac{ds}{dx} = \rho gu(x) = T_0cosh\frac{x}{D} \quad (13)$$

To właśnie ta obliczona przez nas zmiana w napięciu powoduje zmianę prędkości fali dla różnych pozycji na strunie.

Przejdźmy do omówienia kodów, będących rozwiązaniami dwóch zadań:

1. rozwiązanie równania falowego z tarciem,
2. rozwiązanie równania falowego na krzywej łańcuchowej z tarciem.

Bibliografia

[1] http://kfe.fjfi.cvut.cz/ kucharik/edu/PF/1/lit/Landau_Paez-CP_Python-2018.pdf

Dziękujemy za uwagę!