Raport: "Projekt - Przepływ ciepła"

Natalia Wójcik, Łukasz Siemieniec, Konrad Skutnik

17 Styczeń 2022

1 Wstęp

Ciepło przepływa od gorącego do zimnego, czyli z regionów o wysokiej temperaturze do obszarów o niskiej temperaturze, dzięki czemu zasada ta może być wyrażona matematycznie stwierdzając, że szybkość przepływu ciepła H przez materiał jest proporcjonalna do gradientu temperatury T w całym materiale:

$$H = -K\nabla T(x,t) \tag{1}$$

gdzie K jest przewodnictwem cieplnym danego materiału. Całkowita ilość ciepła Q(t) w materiale i dowolnym momencie jest proporcjonalna do całki temperatury po objętości materiału:

$$Q(t) = \int dxCp(x)T(x,t) \tag{2}$$

gdzie C to ciepło właściwe materiału, natomiast p to jego gęstość. Jako, że energia jest zachowana, tempo spadku Q w czasie musi być równe ilości ciepła wypływającego z materiału. Po uzyskaniu takiego bilansu energetycznego i zastosowaniu twierdzenia o rozbieżności, otrzymujemy równanie ciepła:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial T} = \frac{K}{C_p}\nabla^2 T(x,t) \tag{3}$$

Równanie ciepła jest parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym z przestrzenią i czasem, które są zmiennymi niezależnymi. W naszym problemie że nie ma wahań temperatury w kierunkach prostopadłych do pręta (y i z), więc mamy tylko jedną współrzędną przestrzenną:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial T} = \frac{K}{C_p}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{4}$$

2 Część praktyczna

Pracę skonstruowano na podstawie aluminiowego pręta o długości L = 1m i szerokości wyrównanej do osi X. Jest on izolowany na całej długości, poza końcami. Temperatura początkowa pręta wynosi $100°C$. Następnie oba końce stykamy z lodowatą wodą o temperaturze $0°C$. Ciepło wypływa tylko z nieizolowanych końców.

Zadanie polegało na stworzeniu programu w Pythonie, który pozwoli na określenie zmiany temperatury na całej długości pręta. W tym celu potrzebne było rozwiązanie równania różniczkowego dla ciepła.

$$T(x,t) = X(x)\tau(t) \tag{5}$$

gdy podstawimy to do równania ciepła i podzielimy przez X(x) T(t), otrzymamy:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} + k^2\frac{C}{C_p}\tau(t) = 0 \tag{7}$$

gdzie k jest stałą.

Warunek brzegowy, że temperatura przy x=0 jest równa funkcji sinus dla X:

$$X(x) = Asinkx \tag{8}$$

warunek brzegowy, że temperatura jest równa zeru przy x = L, to wówczas mamy:

$$sinkL = 0; k = k_n = \frac{n\pi}{L}; n = 1, 2, ... \tag{9}$$

pamiętając, że funkcja czasu jest zanikająca w k, gdzie n może być dowolną liczbą całkowitą, A_n jest dowolną stałą, a współczynniki A_n są określone przez warunek początkowy (t = 0, to T = $100°C$, wyciąga się wniosek, że:

$$T(x,t) = \Sigma_{n=1,3,...}^{\infty}\frac{4T_0}{n\pi}sink_nxe^{\frac{-k_n^2Kt}{C_p}} \tag{10}$$

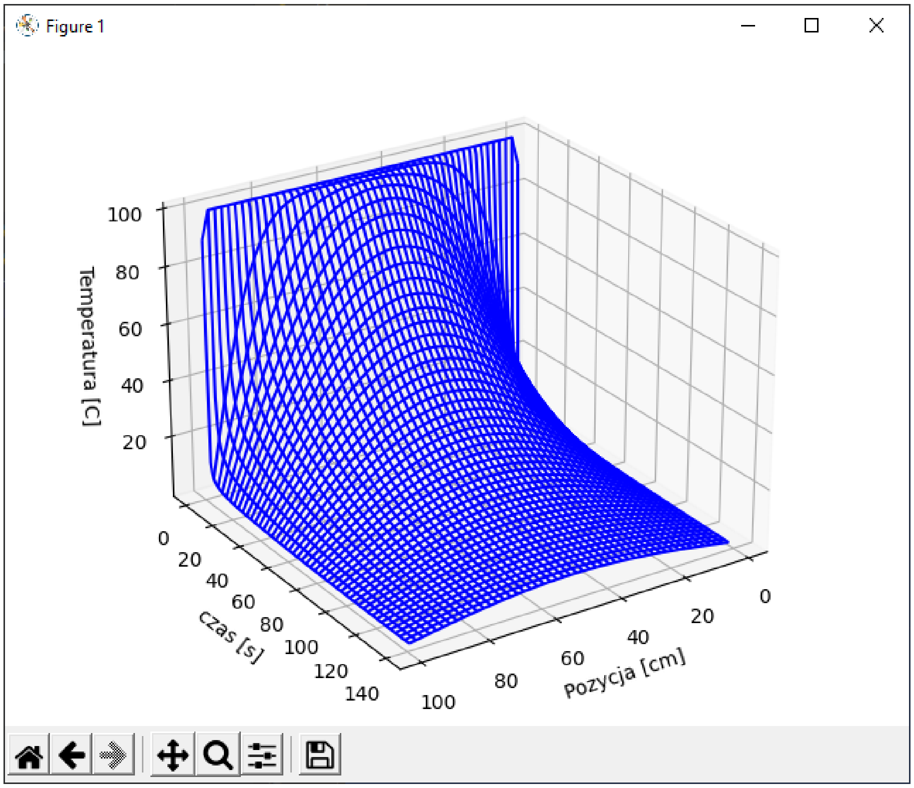
3 Kod programu - Python

```
from numpy import *
import matplotlib.pylab as p
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

Nx = 101;
Nt = 40000;
Dx = 0.03;
Dt = 0.9;
KAPPA = 237.;
SPH = 900.;
RHO = 2700.;
```

```
T = zeros((Nx, 2), float);
Tpl = zeros((Nx, 181), float);
print("pracuje, poczekaj...")

for ix in range(1, Nx - 1):  T[ix, 0] = 100.0;
T[0, 0] = 0.0;
T[0, 1] = 0.
T[Nx - 1, 0] = 0.;
T[Nx - 1, 1] = 0.0
cons = KAPPA / (SPH * RHO) * Dt / (Dx * Dx);
m = 1

for t in range(1, Nt):
    for ix in range(1, Nx - 1):
        T[ix, 1] = T[ix, 0] + \
            cons * (T[ix + 1, 0] + \
                    T[ix - 1, 0] - 2. * T[ix, 0])
    if t % 225 == 0 or t == 1:
        for ix in range(1, Nx - 1, 2):
            Tpl[ix, m] = T[ix, 1]
        print(m)
        m = m + 1
    for ix in range(1, Nx - 1): T[ix, 0] = T[ix, 1]
x = list(range(1, Nx - 1, 2))
y = list(range(1, 140))
X, Y = p.meshgrid(x, y)

def functz(Tpl):
    z = Tpl[X, Y]
    return z


Z = functz(Tpl)
fig = p.figure()
ax = Axes3D(fig)  # rysowanie osi
ax.plot_wireframe(X, Y, Z, color='b')
ax.set_xlabel('Pozycja [cm]')
ax.set_ylabel('czas [s]')
ax.set_zlabel('Temperatura [C]')
p.show()
print("skonczone)
```

4 Wyniki i podsumowanie

Wynik pracy programu przedstawia wykres.



Pokazuje on nam jak temperatura na całej długości pręta ulega zmianie w czasie, spełniając tym samym i rozwiązując nasze zadanie.