Projekt - Przepływ ciepła

prezentacja na modelowanie komputerowe

Natalia Wójcik, Łukasz Siemieniec, Konrad Skutnik

2022-Styczeń-10

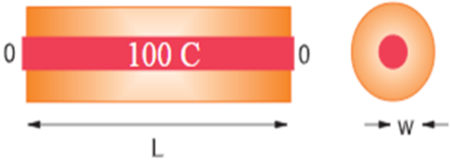
Spis treści

- WSTĘP
- RÓWNANIE PARABOLICZNE CIEPŁA
- EKSPANSJA ANALITYCZNA
- TIME-STEPPING
- OCENA STABILNOŚCI VON NEUMANNA
- PREZENTACJA KODU
- PREZENTACJA WYKRESU WYKONANEGO PRZEZ KOD

Wstęp

W tej prezentacji zbadamy problem aluminiowego pręta o długości $L = 1m$ i szerokości w wyrównanej wzdłuż osi X. Jest izolowany na całej długości ale nie na końcach.

Początkowo sztabka ma jednakową temperaturę $100C$, a następnie oba końce stykają się z lodowatą wodą o temperaturze $0C$. Ciepło wypływa tylko z końców nieizolowanych. Naszym zadaniem jest określić, w jaki sposób temperatura będzie się zmieniać, gdy będziemy poruszać się wzdłuż pręta w późniejszym czasie.



Równanie paraboliczne ciepła

Faktem natury jest to, że ciepło przepływa z gorącego do zimnego, to znaczy z regionów o wysokiej temperaturze do regionów o niskiej temperaturze.
Matematyczne możemy to zapisać, że szybkość przepływu ciepła H przez materiał jest proporcjonalna do gradientu temperatury w poprzek materiału.

$$H = -K \nabla T(x, t) \tag{1}$$

gdzie K jest przewodnością cieplną materiału.

Równanie paraboliczne ciepła

Całkowita ilość ciepła $Q(t)$ w materiale w dowolnym momencie jest proporcjonalna do całki temperatury przez objętość tego materiału:

$$Q(t) = \int dx * Cp(x) * T(x,t) \tag{2}$$

Ponieważ energia jest zachowana, tempo spadku Q_w czasie musi być równe ilości ciepła wypływającego z materiału. Po osiągnięciu tego bilansu energii i zastosowaniu twierdzenia o dywergencji otrzymujemy równanie ciepła:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{[K\nabla^2 T(x,t)]}{C_p} \tag{3}$$

Równanie paraboliczne ciepła

Równanie ciepła jest parabolicznym PDE z przestrzenią i czasem jako zmiennymi niezależnymi:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{K\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2 C_p} \tag{4}$$

Jak podano, temperatura początkowa pręta i warunki brzegowe są:

$$T(x, t=0) = 100C;\ T(x=0,t) = T(x=L,t) = 0C \tag{5}$$

Ekspansja analityczna

Analogicznie do równania Laplace'a rozwiązanie analityczne rozpoczyna się od założenia, że rozwiązanie rozdziela się na iloczyn funkcji przestrzeni i czasu.

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0, \quad \frac{dT(t)}{dt} + k^2 \frac{C}{C\rho} T(t) = 0,$$

$$X(x) = A \sin kx$$

Warunek brzegowy, że temperatura jest równa zero przy $x = L$ wymaga funkcji sinus, która tam zanika.

$$\sin kL = 0 \Rightarrow k = k_n = n\pi/L, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Ekspansja analityczna

Funkcja czasu:

$$T(t) = e^{-k_n^2 t/C\rho}, \;\Rightarrow\; T(x,t) = A_n \sin k_n x e^{-k_n^2 t/C\rho}$$

gdzie n może być dowolną liczbą całkowitą, a A_n jest to dowolna stała. Najbardziej ogólnym rozwiązaniem jest liniowa superpozycja wszystkich wartości n.

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x\, e^{-k_n^2 t/C\rho}.$$

Współczynniki A_n są określone przez warunek, że w czasie $t = 0$ cały pręt ma temperaturę:

$$T(x,t=0) = 100 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = 100. \quad T(x,t) = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{4T_0}{n\pi} \sin k_n x e^{-k_n^2 K t/(C\rho)}$$

Time-Stepping

- Podobnie jak w przypadku równania Laplace'a, rozwiązanie numeryczne polega na zamianie równania różniczkowego na równanie nieskończonej różnicy.
- Dyskretyzujemy przestrzeń i czas na sieci i rozwiązujemy rozwiązania w miejscach sieci. Węzły poziome z białymi środkami odpowiadają znanym wartościom temperatury dla czasu początkowego, natomiast białe węzły pionowe odpowiadają ustalonej temperaturze wzdłuż granic.
- Jeśli jednak znany będzie tylko górny wiersz, otrzymamy algorytm, który posuwa się naprzód w czasie o jeden wiersz na raz, tak jak w dziecięcej grze przeskok.

Time-Stepping

- Jak to często bywa w przypadku cząstkowych równań różniczkowych, algorytm jest dostosowany do rozwiązywanego równania i dla ograniczeń nałożonych przez określony zbiór warunków początkowych i brzegowych.
- Mając na początek tylko jeden rząd czasów, dla pochodnej czasowej temperatury stosujemy przybliżoną różnicę w przód:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \simeq \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$$

Time-Stepping

W konsekwencji, tak jak w przypadku równania Laplace'a, dla pochodnej przestrzennej stosujemy dokładniejsze przybliżenie różnicą środkową:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t)}{(\Delta x)^2}.$$

$$\frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \frac{K}{C\rho}\frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t)}{\Delta x^2}.$$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta\left[T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}\right], \quad \eta = \frac{K\Delta t}{C\rho\Delta x^2}$$

Ocena stabilności von Neumanna

Analiza stabilności von Neumanna opiera się na założeniu, że tryby własne równania różnicowego można zapisać jako:

$$T_{m,j} = \xi(k)^j \, e^{ikm\Delta x}$$

Gdzie

$$x = m\Delta x t = j\Delta t; i = \sqrt{-1} \tag{6}$$

jest liczbą urojoną.
K jest nieznanym wektorem falowym

$$(\frac{2\pi}{\lambda}), \tag{7}$$

a $\xi(k)$ jest nieznaną funkcją złożoną.

Ocena stabilności von Neumanna

Zastosowanie analizy stateczności jest prostsze niż mogłoby się wydawać.Podstawiamy dwa wcześniejsze wzory pod siebie:

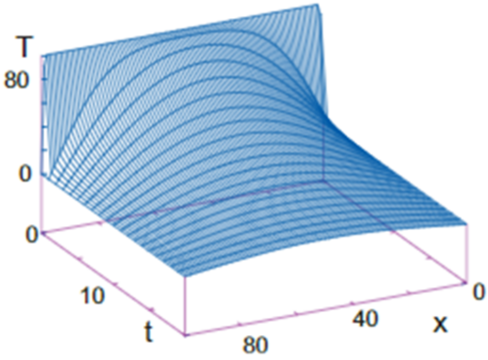
$$\xi^{j+1} e^{ikm\Delta x} = \xi^{j+} e^{ikm\Delta x} + \eta\left[\xi^{j} e^{ik(m+1)\Delta x} + \xi^{j+} e^{ik(m-1)\Delta x} - 2\xi^{j+} e^{ikm\Delta x}\right]$$

$$\xi(k) = 1 + 2\eta[\cos(k\Delta x) - 1].$$

$$\eta = \frac{K\,\Delta t}{C\rho\,\Delta x^2} < \frac{1}{2}.$$

Prezentacja kodu i wykresu wykonanego przez niego

Aby nasz kod działał poprawnie, musi narysować wykres przypominają ten z zdjęcia:



Przechodzimy do prezentacji kodu.