2021-12-24

Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

Trajektoria lotu pocisku

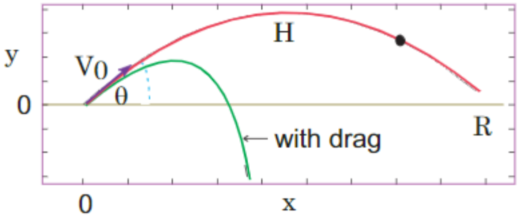
TRAJEKTORIA LOTU POCISKU

IZABELA CZARNY, RAFAŁ BOCUL

O CZYM JEST PREZENTACJA?

Gracze w golfa i baseballa twierdzą, że trafione piłki wydają się spadać prosto z nieba na końcu ich trajektorii. W naszym projekcie przedstawimy równania ruchu odpowiedzialne za ruch pocisku w polu grawitacyjnym z oporem powietrza. Przedstawimy również program realizujący takie zagadnienie.

TROCHĘ TEORII



Na załączonym obrazku widzimy trajektorię lotu. Czerwona linia pokazuje nam trajektorię bez oporu powietrza, a zielona z oporem. W przypadku tej pierwszej działa tylko siła grawitacji ($g = 9{,}81\ m/s^2$).

KIEDY POMIJAMY OPÓR POWIETRZA

Dla sytuacji, gdy pomijamy opór powietrza, analitycznymi rozwiązaniami równań ruchu są:

$$\mathrm{x(t) = V_{0x}t} \tag{1}$$

$$\mathrm{y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2} * gt^2} \tag{2}$$

$$\mathrm{V_x(t) = V_{0x}} \tag{3}$$

$$\mathrm{V_y(t) = V_{0y}t - gt^2} \tag{4}$$

gdzie:

$$\mathrm{(V_{0x}, V_{0y}) = V_0(Cos\theta, sin\theta)} \tag{5}$$

Obliczamy t jako funkcję x i zastępujemy ją przez Równanie y(t). Dzięki temu dowiadujemy się, że trajektoria jest parabolą:

$$y = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} * x - \frac{g}{{V_{0x}}^2} * x^2 \tag{5}$$

Podobnie, łatwo wykazać, że bez tarcia zakres R wynosi:

$$2{V_0}^2\sin\theta, \cos\theta/g \tag{6}$$

a maksymalna wysokość

$$\frac{1}{2}{V_0}^2\sin^2\theta/g \tag{7}$$

Parabola ruchu bez tarcia jest symetryczna względem swojego punktu środkowego, więc nie opisuje kuli spadającej z nieba. Chcemy ustalić, czy włączenie oporu powietrza prowadzi do trajektorii, które są znacznie bardziej strome na ich końcu niż na początku.Podstawową fizyką jest drugie prawo Newtona w dwóch wymiarach dla siły tarcia F(f) przeciw ruchowi oraz pionowej siły grawitacyjnej - mgˆe_y :

$$\mathbf{F}^{(f)} - mg\hat{\mathbf{e}}_y = m\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2},$$

$$\Rightarrow \quad F_x^{(f)} = m\frac{d^2x}{dt^2}, F_y^{(f)} - mg = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

Siła tarcia F(f) nie jest podstawową siłą natury, lecz prostym modelem skomplikowanego zjawiska. Wiemy, że tarcie zawsze przeciwstawia się ruchowi, co oznacza, że ma kierunek przeciwny do prędkości. Jeden model zakłada, że siła tarcia jest proporcjonalna do mocy prędkości pocisku.

$$\mathbf{F}^{(f)} = -k\,m\,|v|^n\,\frac{\mathbf{v}}{|v|},$$

gdzie współczynnik - v / — v — zapewnia, że siła tarcia jest zawsze w kierunku przeciwnym do prędkości. Pomiary fizyczne wskazują, że potęga nie jest liczbą całkowitą i zmienia się wraz z prędkością, a zatem dokładniejszym modelem byłby model numeryczny, który wykorzystuje empiryczną zależność prędkości (v).

Przy stałym prawie potęgowym dla tarcia równania ruchu otrzymujemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\, v_x^n\, \frac{v_x}{|v|}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\, v_y^n\, \frac{v_y}{|v|}, \quad |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Bibliografia

TEX, LATEX

- Plik pdf ODE1
- https://en.wikipedia.org/wiki/Paris-Gun
- http://www.elektron.up.krakow.pl/ab/mgr-2006-MM.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/RungeKutta-methods
- https://armoryforums.com/physics-behind-the-paris-gun/

Dziękujemy za uwagę!