

Porównanie metod Rungego-Kutty - RK2, RK4, RK45

Katarzyna Gajewska
Michał Kreft
Tomasz Biel

Department of Material engineering and physics
Computer modeling

Metody Rungego-Kutty

Zbiór metod różnego rzędu które służą do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych. W metodach tych nachylenie szacowane jest na podstawie kilku punktów wewnątrz przedziału. Różne metody RK klasyfikowane są ze względu na ich rząd (odpowiadający liczbie punktów wziętych do szacowania nachylenia).

Ogólna formuła na metodę Rungego-Kutty rzędu 2-go jest następująca:

$$x(t+h) = x + w_1 hf(t, x) + w_2 hf(t+h, x+f) + O(h^3)$$

$$w_1 + w_2 = 1, w_2 = \frac{1}{2}, w_2\beta = \frac{1}{2}$$

Jako, że możemy dobrać parametry dowolnie, to istnieje nieskończenie wiele dwuetapowych metod Rungego-Kutty rzędu drugiego. W praktyce wykorzystywane są jednak dwa warianty szczególne:

- 1 Metoda Heuna
- 2 Metoda MidPoint

Metoda Heuna

[1]Metoda Heuna jest metodą drugiego rzędu z dwoma etapami. Jest również znana jako jawna reguła trapezu, ulepszona metoda Eulera lub zmodyfikowana metoda Eulera.

$$x(t + h) \approx x(t) + \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

$$F_1 = hf(x, t), F_2 = hf(t + h, x + F_2)$$

Metoda MidPoint

[1]Metoda punktu środkowego jest metodą drugiego rzędu z dwoma etapami. Jest również znana jako metoda Cauchy'ego-Eulera.

$$x(t + h) \approx x(t) + F_2$$

$$F_1 = hf(x, t), F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1)$$

Metoda RK4

[2]Z uwagi na zalety tej metody którymi są prostota implementacji i najlepszy stosunek liczby obliczeń funkcji do maksymalnego rzędu, z reguły jeśli mówimy o metodzie RK to mamy na myśli tę właśnie metodę.

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$F_1 = hf(x, t), F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2), F_4 = hf(t + h, x + F_3)$$

Metoda RK 45

[3] Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga to jedna z metod adaptacyjnych. Są to dwa schematy, połączenie schematów 4 i 5. Są one idealnie dopasowane do siebie, to co obliczymy w schemacie 4, wykorzystamy później w schemacie 5. Różnica błędów tych dwóch schematów pozwoli nam lokalnie oszacować błąd. Jeśli będzie on zbyt duży to zmniejszymy krok, a jeżeli zbyt mały to go zwiększymy.

$$x_1(t+h) = x(t) + \sum_{i=1}^6 b_i F_i + O(h^6)$$

$$x_2(t+h) = x(t) + \sum_{i=1}^6 b_i * F_i + O(h^5)$$

$$F_i = hf(t + c_i h, x + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} F_j) \quad (1 \leq i \leq 6)$$

Tabela Butchera:

0					
1/4	1/4				
3/8	3/32	9/32			
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197		
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104	
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40
<hr/>					
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50 2/55
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5 0

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots		\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	
<hr/>					
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s
	b_1^*	b_2^*	\dots	b_{s-1}^*	b_s^*

Figure: Tabelka z wartościami współczynników w metodach RK [4]

Opis ćwiczenia

- 1 Zaimplementowaliśmy dwie metody **rk2** (poprzez odpowiednie dobranie wartości współczynników $W1$ i $W2$) - Heuna i MidPoint.
- 2 Użyliśmy swojej metody **rk2** (w opisie skupimy się na metodzie Heuna) w programie, który rozwiąże równanie ruchu oscylatora harmonicznego $F_{ext}(x, t) - kx^{p-1} = m \frac{d^2x}{dt^2}$. Początkowo pominęliśmy siłę zewnętrzną F_{ext} , a później sprawdziliśmy jak zachowa się oscylator po dołożeniu jej. Możemy teraz naszkicować zależności $x(t)$ oraz prędkości $v(t) = dx/dt$ w funkcji czasu, ale jeszcze nie w tym momencie.
- 3 Gdy program się skompilował i nie ma żadnych błędów, dopilnowaliśmy aby nasze obliczenia wykonały się poprawnie. W tym celu dopracowaliśmy naszą implementację wedle poniższych podpunktów:

a) Zadbaliśmy o to, aby nasz oscylator był oscylatorem harmonicznym. W tym celu ustawiliśmy parametr $p = 2$. W tym momencie nasze rozwiązanie możemy skojarzyć z poniższymi równaniami:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad v(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

b) Wybieramy wartości parametru k oraz m , takie, aby był spełniony warunek $T = 2\pi/\omega$ oraz np. $T = 1$. Ostetecznie otrzymaliśmy następujące zestawienie parametrów:

$$\omega_0 = 6,28 ; k = 3,94 ; m = 0,1 ; T = 1 ; A = 1 ; \phi = 0$$

Wobec tego powyższe równania prezentują się następująco:

$$x(t) = 1 \sin(6,28t + 0), \quad v(t) = 6,28 \cos(6,28t + 0).$$

Skoro mamy pewność o poprawności analitycznej (zerowe położenie początkowe i niezerowa prędkość), narysujemy teraz więc te wielkości na wykresie i zobaczymy, że wszystko funkcjonuje jak powinno. Jeśli gołym okiem na wykresie nie możemy rozróżnić naszego rozwiązania od dokładnego, oznacza to że mamy wysoką dokładność.

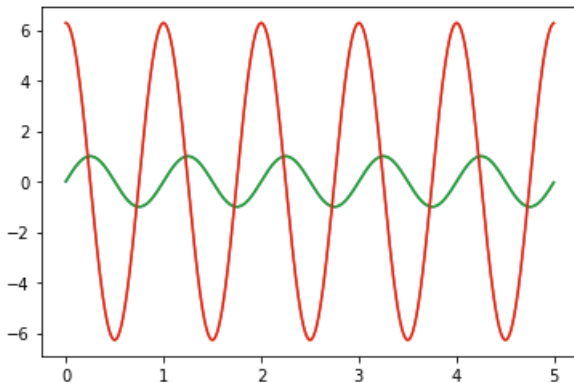


Figure: Zależność $x(t)$ oraz $v(t)$ na jednym wykresie

c) Zaczęliśmy z wielkością kroku równą $h \simeq T/5$ i zmniejszaliśmy wartość kroku h do momentu aż rozwiązanie będzie wyglądało gładko. W zasadzie powinniśmy zacząć od kroku $h \simeq T/100$, lecz zaczynamy od takiego dużego, by zobaczyć jak funkcja, która jest bardzo niedokładna, powoli przeobraża się w gładkie, bardzo dobrze przybliżone rozwiązanie. Poniżej mamy kilka grafik prezentujących to przejście:

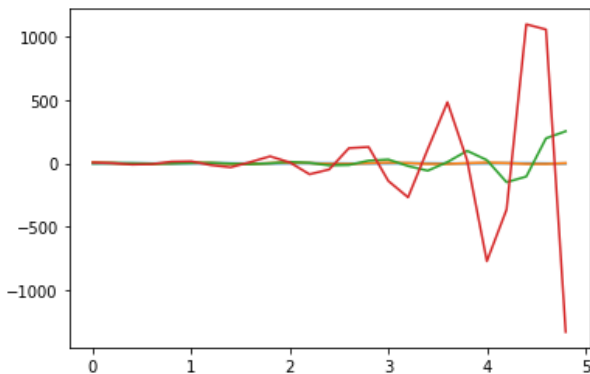


Figure: $h = 0,2$

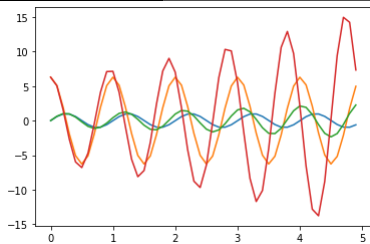


Figure: $h = 0,1$

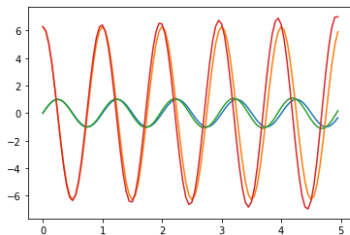


Figure: $h = 0,05$

d) Wstawiliśmy teraz inną prędkość początkową do naszego rozwiązania i sprawdzamy, czy oscylator harmoniczny jest izochroniczny. Jeśli jest, to jego okres nie zmienia się wraz z amplitudą. Dla porównania zostawimy nasze dokładne rozwiązanie z poprzednią wartością prędkości:

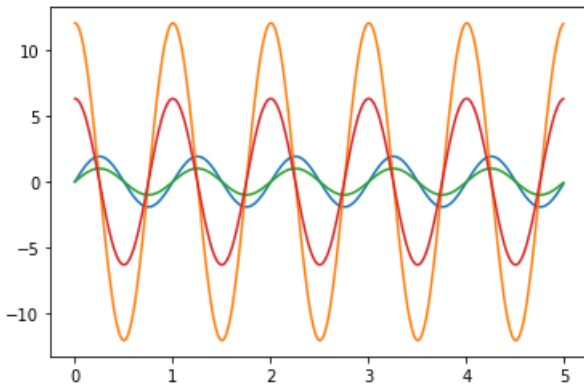


Figure: Porównanie okresów drgań podczas zmiany prędkości

- 4 Teraz, gdy już wiemy, że mamy dobre rozwiązanie równania metodą **rk2 Heuna**, możemy teraz zaimplementować pozostałe metody: **rk2 MidPoint**, **rk4**, **rk45**.
- 5 Porównamy jeszcze wszystkie z omówionych metod na podstawie poniższych dwóch równań:

$$2yy'' + y^2 - y'^2 = 0, \quad (1)$$

$$y'' + 6y^5 = 0. \quad (2)$$

z warunkami początkowymi $[y(0), y'(0)] = (1, 1)$. Nieliniowe równanie (1) ma analityczne rozwiązanie $y(t) = 1 + \sin t$. Musimy jednak pamiętać, że metody **rk2** mogą nie rozwiązać poprawnie tego równania, gdyż dwa warunki w równaniu proporcjonalnym do y znikają, zostawiając $y^2 = 0$, co jest problematyczne. Inne metody powinny lepiej przybliżyć nam to rozwiązanie. Równanie (2) odpowiada naszym potencjalnym standardom $V(x) = \frac{1}{p}kx^p$, z wartością $p = 6$. Chociaż nie mamy dostrojonej metody **rk45**, wiemy i możemy sprawdzić, że poprzez ustawienie jej parametru tolerancji do wystarczająco małej liczby, metoda **rk45** uzyska lepszą precyzję niż **rk4**, ale wymaga dużo dłuższych i dokładniejszych obliczeń.

Narysujmy również wykresy dla $p = 6$ oraz uwzględnimy teraz dołożoną siłę zewnętrzną. Można zauważyć tutaj pewne prawidłowości.

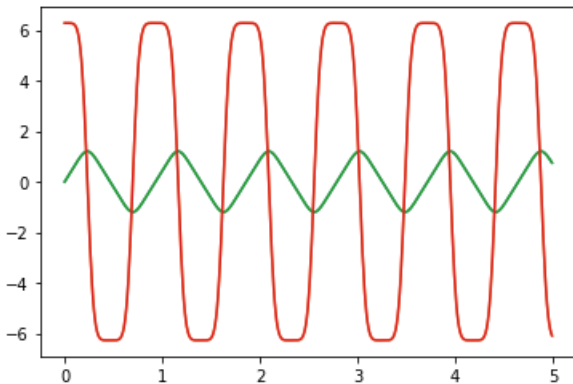


Figure: $p = 6$

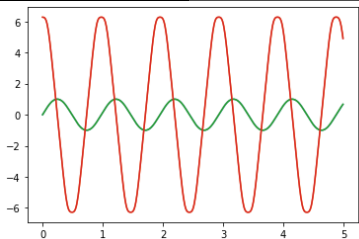


Figure: Oscylator $p = 2$ z dodatkową siłą

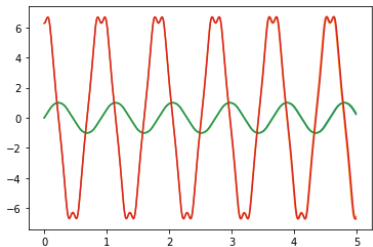


Figure: Oscylator $p = 2$ z jeszcze większą siłą

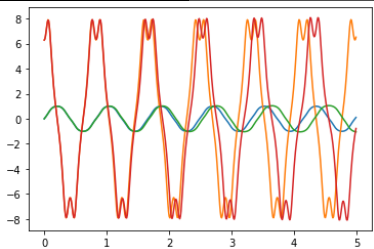


Figure: Oscylator $p = 2$ z ogromną dołożoną siłą

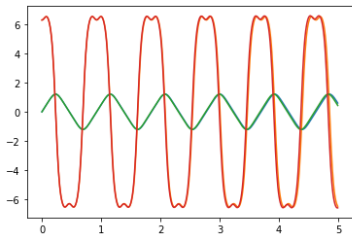






Figure: Oscylator $p = 6$ z dołożoną siłą

Przedział [0,5]							
		Specjalny warunek	błąd x	błąd v	czas [s]	h	
oscylator hamroniczny	rk2 Heuna	$p = 2$	6,52E-03	4,14E-02	0,007	0,01	
		$p = 6$	5,90E-02	3,42E-01	0,012		
		dodatkowa siła, $p = 2$	4,28E-03	2,62E-02	0,012		
		dodatkowa siła, $p = 6$	5,23E-02	3,09E-01	0,014		
	rk2 Mid Point	$p = 2$	6,53E-03	4,14E-02	0,0065	0,01	
		$p = 6$	6,55E-03	3,80E-01	0,013		
		dodatkowa siła, $p = 2$	4,68E-03	2,84E-02	0,009		
		dodatkowa siła, $p = 6$	6,20E-02	3,68E-01	0,011		
	rk4	$p = 2$	1,20E-06	7,67E-06	0,02	0,01	
		$p = 6$	9,29E-05	5,44E-04	0,024		
		dodatkowa siła, $p = 2$	2,19E-06	1,33E-05	0,019		
		dodatkowa siła, $p = 6$	7,60E-05	4,56E-04	0,036		
				błąd	czas [s]	h średnie	
	rk45	$p = 2$		6,58E-07	0,047	0,01025	
		$p = 6$		6,87E-07	0,1	0,00463	
		dodatkowa siła, $p = 2$		3,19E-06	0,072	0,00858	
dodatkowa siła, $p = 6$			1,53E-06	0,16	0,00463		
Przedział [0,20]							
			błąd y	błąd y'	czas [s]	h	
równanie (1)	rk4	---	4,51E-07	4,91E-07	0,08	0,01	
	rk45	---	5,60E-07		0,007	0,3127	
	rk2 Heuna	---	3,18E-06	5,22E-06	0,054	0,01	
	rk2 MidPoint	---	3,48E-06	6,74E-06	0,052	0,01	
równanie (2)	rk4	---	2,00E-06	3,52E-06	0,083	0,01	
	rk45	---	1,84E-06		0,059	0,02815	
	rk2 Heuna	---	6,03E-03	1,04E-02	0,05	0,01	
	rk2 MidPoint	---	3,72E-03	6,45E-03	0,07	0,01	

Figure: Tabela ze wszystkimi wypisanymi wartościami

Bibliografia I

-  http://www.tu.kielce.pl/~rokach/instr/mn_wyklad_11b-12.pdf.
-  https://www.wikiwand.com/pl/Algorytm_Rungego-Kutty#/Metoda_RK_4._rzędu.
-  http://anna.czemplik.staff.iiar.pwr.wroc.pl/images/Danaliza/wyklad_met_num.pdf.
-  <https://rotordynamics.wordpress.com/2014/05/11/the-variable-step-method-of-fehlberg/>.