

# Prezentacja: Algorytmy - Programowanie dla fizyków 2

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

Katarzyna Gajewska  
Maciej Kucharski  
Tomasz Biel

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki  
Wydział Inżynierii materiałowej i fizyki  
Fizyka techniczna, rok 2

11.06.2021

# Spis treści

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?  
Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?  
Zobrazowanie  
graficzne  
Przykład z  
wykonanego  
programu  
Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów  
Problem CSP  
Przykład: Problem  
hetmanów  
Przykład: Litery A

## Bibliografia

- 1 Rekurencja
  - Czym jest rekurencja?
  - Przykłady rekurencji
- 2 Backtracking
  - Czym jest backtracking?
  - Zobrazowanie graficzne
  - Przykład z wykonanego programu
  - Backtracking jako metoda rozwiązywania problemów
  - Problem CSP
  - Przykład: Problem hetmanów
  - Przykład: Litery A
- 3 Bibliografia

# Czym jest rekurencja?

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

[1] Rekurencja jest to odwoływanie się np. funkcji lub definicji do samej siebie. W logice wnioskowanie rekurencyjne opiera się na założeniu istnienia pewnego stanu początkowego oraz zdania stanowiącego podstawę wnioskowania (przy czym, aby cały dowód był poprawny, zarówno reguła, jak i stan początkowy muszą być prawdziwe). Istotą rekurencji jest tożsamość dziedziny i przeciwdziedziny reguły wnioskowania, wskutek czego wynik wnioskowania może podlegać tej samej regule zastosowanej ponownie.

# Czym jest rekurencja?

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

[2] Definicja rekurencyjna składa się z dwóch części. W pierwszej, zwanej podstawową lub warunkiem początkowym, są wyliczone elementy podstawowe, stanowiące części składowe wszystkich pozostałych elementów zbioru. W drugiej części, zwanej krokiem indukcyjnym, są podane reguły umożliwiające konstruowanie nowych obiektów z elementów podstawowych lub obiektów zbudowanych wcześniej. Reguły te można stosować wielokrotnie, tworząc nowe obiekty.

# Rekurencja- przykład

Poniższy przykład przedstawia ciąg Fibonacciego, którego definicja jest rekurencją, ponieważ odwołuje się w swojej definicji do samej siebie.[1]

## Ciąg Fibonacciego:

$$\text{fib}(0) = 0,$$

$$\text{fib}(1) = 1, \text{fib}(1) = 1,$$

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2) \quad \text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$$

$$\text{dla } n \geq 2$$

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

# Rekurencja - przykład

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

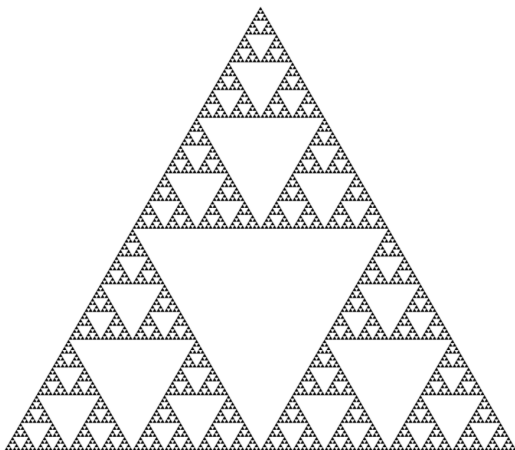
Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia



Rysunek: Graficzny przykład rekurencji[3]

# Rekurencja - przykład

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

[1]**Reguła:** każdy ojciec jest starszy od swojego syna; każdy ojciec jest czyjś synem

**Stan początkowy:** jestem 22-letnim mężczyzną

**Teza:** ojciec ojca mojego ojca jest starszy ode mnie

**Dowód:**

1. Mój ojciec jest starszy ode mnie
2. Mój ojciec jest czyjś synem
3. Ojciec mojego ojca jest starszy od mojego ojca
4. Ojciec mojego ojca jest czyjś synem
5. itd.

# Zrozumieć rekurencję

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia



Rysunek: Kto może zrozumieć rekurencję?[4]



# Czym jest backtracking?

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

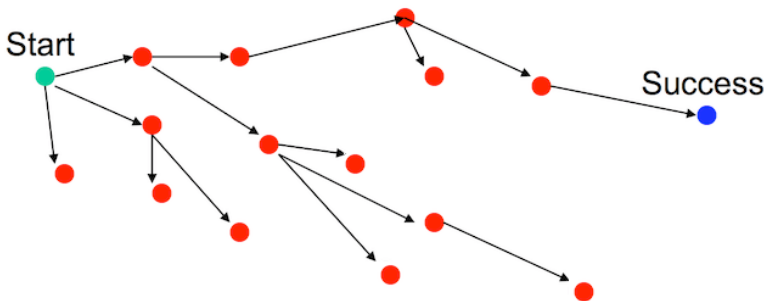
Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

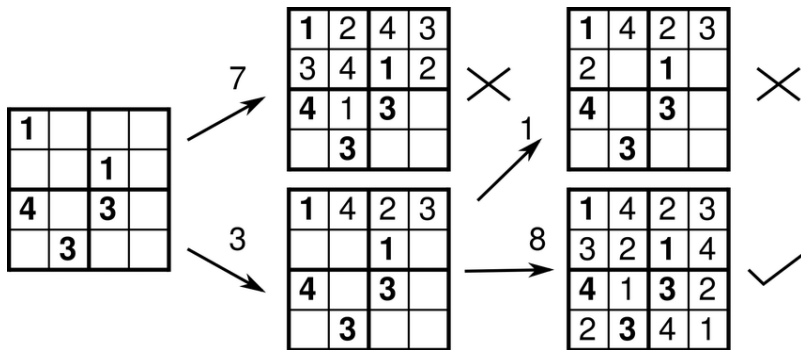
[5] Backtracking (algorytm z nawrotami) jest to algorytm wyszukiwania polegający na znajdowaniu wyniku metodą "prób i błędów" z oznaczaniem niepowodzeń, dzięki czemu te same błędy nie są popełniane dwukrotnie. Przykładem może być rozwiązanie problemu ośmiu hetmanów lub metoda, jaką posłużył się Tezeusz, szukając Minotaura w Labiryncie, zaopatrzonego w nić Ariadny. Algorytmom z nawrotami poświęcono wiele uwagi, poczynając od roku 1967 (R. Floyd) i 1969, kiedy to C. Hewitt zaprojektował język Planner specjalnie w celu realizowania zadań tego rodzaju.

# Graficzny przykład



Rysunek: Zobrazowanie zasady działania backtrackingu

# Przykład - sudoku



Rysunek: Sudoku jako przykład backtrackingu w naszym programie

# Kod z programu

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?  
Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?  
Zobrazowanie  
graficzne  
Przykład z  
wykonanego  
programu  
Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów  
Problem CSP  
Przykład: Problem  
hetmanów  
Przykład: Litery A

## Bibliografia

```
84 bool Sudoku::Rozwiaz(int wiersz, int kolumna)
85 {
86     if (wiersz == (9 - 1) && kolumna == 9)
87         return true;
88
89     if (kolumna == 9)
90     {
91         wiersz++;
92         kolumna = 0;
93     }
94
95     if (liczby[wiersz][kolumna] > 0)
96         return Rozwiaz(wiersz, kolumna + 1);
97
98     for (int num = 1; num <= 9; num++)
99     {
100         if (SprawdzLiczbe(wiersz, kolumna, num))
101         {
102             liczby[wiersz][kolumna] = num;
103
104             if (Rozwiaz(wiersz, kolumna + 1))
105                 return true;
106         }
107
108         liczby[wiersz][kolumna] = 0;
109     }
110     return false;
111 }
112
```

Rysunek: Fragment kodu z wykonanego programu odpowiadający za backtracking (oraz rekurencję)

# Backtracking - metoda rozwiązywania problemów

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia

Większość problemów, przede wszystkim w matematyce i fizyce, ma swoje rozwiązania za pośrednictwem ściśle określonych reguł i wzorów. Algorytm z nawrotami służy do rozwiązywania takich problemów, dla których nie ma ściśle określonych metod ich rozwiązania. Wobec tego konieczne jest wykorzystanie metody prób i błędów. Sprawdzanie każdej możliwości ręcznie byłoby bardzo żmudnym zajęciem, wobec czego powstają algorytmy z nawrotami mające na celu usprawnienie znalezienia rozwiązania. Naturalną techniką kodowania algorytmów opartych na strategii powrotów jest rekurencja.

# Problem CSP

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

## Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

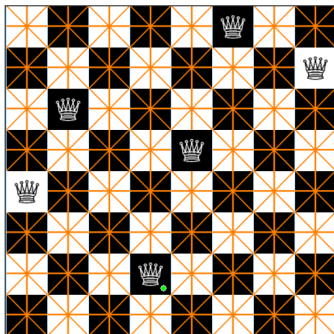
Przykład: Litery A

## Bibliografia

[6] Backtracking służy do rozwiązywania, tzw. problemów CSP (Constraint Satisfaction Problem). Z problemem CSP ma się do czynienia w sytuacji, gdy stan składa się z ustalonej ilości zmiennych mogących przyjmować wartości z określonej dziedziny. Ponadto muszą zostać uwzględnione ograniczenia nałożone na poszczególne zmienne. Ograniczenia mogą powstawać podczas przeszukiwania i być efektem zależności pomiędzy wartościami zmiennych. Jest to przykład przeszukiwania z ograniczeniami.

# Przykład - problem hetmanów

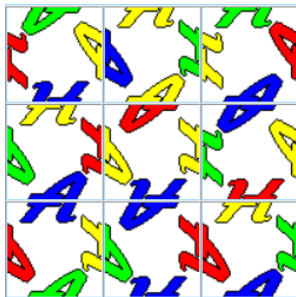
Dobrym przykładem zastosowania metody backtrackingu jest tak zwany "Problem hetmanów". Polega on na rozstawieniu na szachownicy ośmiu hetmanów w taki sposób, aby żaden z nich nie mógł zaatakować innego.



**Rysunek:** Próba ułożenia ośmiu hetmanów zakończona niepowodzeniem[7]

# Przykład - litery A

Kolejnym przykładem, na którym lepiej widać sposób działania backtrackingu jest problem liter "A". W kratce 3x3 musimy uzupełnić każde oczko zadanymi obrazkami, tak aby zawsze tworzyły dwanaście liter "A". W przypadku niepoprawnego ich ułożenia, powstają również inne litery.



**Rysunek:** Próba ułożenia dwunastu liter "A" zakończona niepowodzeniem[8]



# Bibliografia I

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu


Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP


Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A


## Bibliografia


 <https://pl.wikipedia.org/wiki/Rekurencja>.

 <https://slideplayer.pl/slide/400616/>.

 [https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:  
SierpinskiTriangle.svg](https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:SierpinskiTriangle.svg).

 <https://demotywatory.pl/1704967/Rekurencja>.

 [https://encyklopedia.interia.pl/informatyka/  
news-algorytm-z-nawrotami,nId,2087177](https://encyklopedia.interia.pl/informatyka/news-algorytm-z-nawrotami,nId,2087177).

 [https://kcir.pwr.edu.pl/~witold/aiarr/2007\\_  
projekty/sudoku/](https://kcir.pwr.edu.pl/~witold/aiarr/2007_projekty/sudoku/).

 [http://www.hbmeyer.de/backtrack/achtdamen/  
autoeight.htm#up](http://www.hbmeyer.de/backtrack/achtdamen/autoeight.htm#up).

# Bibliografia II

Katarzyna  
Gajewska  
Maciej  
Kucharski  
Tomasz Biel

## Rekurencja

Czym jest  
rekurencja?

Przykłady rekurencji

## Backtracking

Czym jest  
backtracking?

Zobrazowanie  
graficzne

Przykład z  
wykonanego  
programu

Backtracking jako  
metoda  
rozwiązywania  
problemów

Problem CSP

Przykład: Problem  
hetmanów

Przykład: Litery A

## Bibliografia



<http://www.hbmeyer.de/backtrack/backtren.htm>.