TEORIA KATEGORII

Stosy, toposy i języki wewnętrzne

Bartosz Sroczyński, Piotr Szewerniak

Luty 2020

Politechnika Krakowska

LOGIKA DZIAŁANIA

Chcemy stworzyć maszynę, która będzie złożona z współdziałających ze sobą częśći. Zajmiemy się opisem zachowań, które zachodzą wraz z upływem czasu oraz dojściem do tego, jak wzory zachowań pojedynczych elementów wpływają na cały układ.

JAK SPRAWDZIĆ CZY NASZ UKŁAD JEST BEZPIECZNY?

Załóżmy, że chcemy stworzyć samodzielny pojazd, który będzie zachowywał określoną bezpieczną odległość od innych obiektów. Potrzebny nam będzie miernik odległośći który poda nam odległość S', kontroler, który mając zmienną S' podejmie decyzję jaką akcję A układ ma podjąć oraz silnik, który będzie poruszał układem z konkretnym przyspieszeniem zależnym od A. Co więcej nasz ostateczny wynik wpływa na obecną odległość S od innych obiektów. W takim razie mamy tutaj przykład sprzężenia zwrotnego.

JAK SPRAWDZIĆ CZY NASZ UKŁAD JEST BEZPIECZNY?

Aby zapewnić bezpieczeństwo naszemu układowi powiedzmy, że musimy się upewnić czy $S>5$ cm. Kontroler zapewnia relację, że gdy tylko S będzie mnniejsze od tych 5cm da sygnał silnikowi w postaci:

$$\big((A = \mathbf{go}) \Rightarrow \ddot{S} > 1\big) \wedge \big((A = \mathtt{stop}) \Rightarrow \ddot{S} = 0\big)$$

Jeżeli chcemy, żeby każdy z naszych podzespołów zachowywał się jak chcemy musimy zapisać każdą z ich relacji formalnym języku logicznym.

JAK SPRAWDZIĆ CZY NASZ UKŁAD JEST BEZPIECZNY?

Aby było nam łatwiej porawdzć sobie z takim językiem wprowadzimy konstrukcję zwaną toposem, która jest specjalnym typem kategorii. Nasz topos BT będzie nam określał, który z naszych elementów może zmieniać się wraz z czasem. Aby go opisywać będziemy potrzebować bardzo uniwersalnego języka jakim jest matematyka - może ona opisywać grafy, grupy czy przestrzenie topologiczne. Czym jednak się to różni, to fakt, że nasze grafy będą grafami które zmieniają się w czasie, nasze grupy będą grupami zmieniającymi się w czasie, a nasze przestrzenie będą przestrzeniami zmieniającymi się w czasie.

JAK SPRAWDZIĆ CZY NASZ UKŁAD JEST BEZPIECZNY?

Nasz BT nie tylko ma swój własny język, ale również matematyczną semantykę posługującą się notacją stosowaną w snopach. W naszym przypadku snop rozumiemy jako przestrzeń możliwych zachowań różniących się w zależności od upływu czasu.

KATEGORIA ZESTAW(SET) JAKO PRZYKŁADOWY TOPOS

Aby łatwiej zrozumieć toposy zacznijmy od zestawów, ponieważ są bardzo podobne a łatwiej będzie się wdrożyć do zrozumienia ich logiki. Np logiczne stwierdzenie - predykat - likescats definiuje funkcje z zestawu P (osoby) na zestawie B (prawda, fałsz). Adam należące do P mapuje na prawdę, ponieważ lubi koty. W przypadku Ewy należącej do P mapuje ona na fałsz, ponieważ kotów nie lubi.

kategoria zestaw(set) jako przykładowy topos

Naszym odpowiednikiem między operacjami logicznymi a operacjami zestawów jest np. AND, który odpowiada intersection. Zestaw ludzi dla predykatu likescatsANDlikesdogs jest tym samym co intersection zestawu likescats i zestawu likesdogs

Cechy wspólne

- Granice i kogranice

tworzenie nowych obiektów z wyników starych obiektów, używając równań żeby zdefiniować podobiekty, tworzące rozłączne związki.

- Faktoryzacja epi-mono (rozkład na czynniki)

epi - epimorfizm, mapowanie zachowujące się jak funkcja ”na” - funkcja przyjmująca jako swoje wartości wszystkie elementy przeciwdziedziny
mono - monomorfizm, mapowanie zachowujące się jak funkcja różnowartościowa - funkcja, której każdy element przeciwdziedziny przyjmowany jest co najwyżej raz

- Kategoria Kartezjańska domknięta

dla dowolnych dwóch obiektów C, D należących do **C** istnieje hom funktor D do potęgi C do **C** i naturalny izomorfizm dla jakiegokolwiek A należącego do **C**

- Klasyfikator podobiektu

podobiekty Y są klasyfikowane według predykatów na Y
każdy obiekt Y rozumie samego siebie - jego części i logikę, jak pasują do siebie poprzez zadawanie pytań wyroczni Omega
W przypadku zestawów monomorfizm oznacza iniekcje. Dla każdej injekcyjnej funkcji m: X -> Y pomiędzy zestawami, powinniśmy być w stanie znaleźć funkcję charakterystyczną [m]: Y -> true, false

uzyskiwanie operacji AND

P	Q	$\ulcorner(\mathtt{true},\mathtt{true})\urcorner(P,Q)$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

uzyskiwanie operacji OR

P	Q	$P \vee Q$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

Snop - trójka uporządkowana (F, π,χ) składająca się z przestrzeni topologicznej F, przestrzeni Hausdorffa χ oraz lokalnie homeomorficznej surjekcji π: F -> χ.

Zamiast badać przestrzenie, uważamy przestrzenie za zwykłe tereny na których mogą się dziać przeróżne rzeczy. Rzeczy, które mogą się zdarzyć na przestrzeni, są nazywane snopami, i zawsze formują typ kategorii zwany toposem.

Najprostszą wersją terenu są te, które pochodzą z przestrzeni topologicznych: każda topologiczna przestrzeń ma pierwotnie strukture terenu.

snopy (sheaves)

Przestrzeń topologiczna (X, **Op**) jest zestawem X razem z podzestawami, które nazywamy ”otwartymi”; te otwarte podzestawy formują praporządek oznaczany jako **Op**. Snopy na X będą presheaves (brak tłumaczenia) na **Op** z unikalną właściwością zwaną ”snopowym warunkiem”; kategoria snopów na X jest toposem.

Topos jest zdefiniowany jako kategoria snopów. Toposy są niesamowicie ładnymi strukturami z różnych pozornie odmiennych powodów. W tym szkicu skupiono się na tym, że każdy topos ma wiele takich samych struktur właściwości, które ma kategoria ”Set”.

PODOBIEKTOWY KLASYFIKATOR Ω

Omówmy teraz podobiektowy klasyfikator Ω, czyli obiekt wartości prawdy w toposie snopkowym Shv (X, Op).

Snop Ω jest przedwzmacniaczem, który spełnia ”snopowy warunek”. Jako presheaf jest tylko funktorem Ω: Opop → Set; przypisuje zestaw Ω (U) do każdego otwartego U $\subseteq Ximaograniczeniemapa(U)(V)zawsze, gdyV \subseteq U$.

PREDYKAT

W toposie E $Shv(X, Op)$ predykatem jest morfizm snopa $p\colon S \to \Omega$, gdzie $S \ni E$ jest snop i $\Omega \ni E$ to podobiektowy klasyfikator, snop wartości prawdy.

Dla toposu E Shv (X, Op) i obiektu (snop) S ∋ E, zestaw predykatów S | ΩE | E (S, Ω) ma naturalnie strukturę poset (brak tlumaczenia).

Kwantyfikacja występuje w dwóch odmianach: uniwersalnej i egzystencjalnej lub „dla wszystkich” i „istnieje”. ”Każda przyjmuje predykat $n + 1$ zmiennych i zwraca predykat n zmiennych.

Biorąc pod uwagę predykat p: $S \times T \to \Omega$, powszechnie kwantyfikowany predykat V (t: T). p (s, t) przyjmuje sekcję s $\ni$ S (U) dla dowolnego otwartego zestawu U i zwraca a pewien otwarty zestaw V $\ni$ Ω (U).

EGZYSTENCJALNA KWANTYFIKACJA

Biorąc pod uwagę predykat p: $S \times T \to \Omega$, egzystencjalnie kwantyfikowany predykat $\ni$ (t: T). p (s, t) przyjmuje sekcję s $\ni$ S (U) dla dowolnego otwartego zestawu U i zwraca wartość w formie pewnego otwartego zestawu V $\ni$ Ω (U).

PODSUMOWANIE

Temat, który został przez nas poruszony mówi o modelowaniu różnych zestawów zachowań używając do tego stosów na przestrzeni interwałów w czasie. Dane zachowanie może wydawać się czymś, co dzieje się w danej chwili, jednak nasza pamięć przeszłych zachowań informuje nas, co dane zachowanie oznacza. Żeby być w stanie planować i realizować jakiekolwiek procesy, musimy być w stanie zrozumieć interwały w czasie (time-intervals). Całość tematu jest bardzo złożona i można by tłumaczyć powiązane z nią zagadnienia godzinami. Mamy nadzieję, że dobrze omówiliśmy wybrane przez nas zagadnienia.

Dziękujemy za uwagę!