Resource theories: Monoidal preorderes and enrichment

Agnieszka Mach
Robert Wojtaszek

07,02,2020

Kategoria monoidalna

W matematyce kategoria monoidalna (lub kategoria tensorowa) to kategoria C wyposażona w bifunktor

$$\otimes : C \times C \rightarrow C$$

który jest skojarzony z naturalnym izomorfizmem, a obiekt I, który jest zarówno lewą, jak i prawą tożsamością dla $\otimes$, ponownie aż do naturalnego izomorfizmu.

Monoid

Monoid to zestaw X wyposażony w:
operacja binarne $\otimes$: $X \times X \to X$ element $I \in X$ tak, aby przepisy te miały:
prawo asocjacyjne: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ dla wszystkich x, y, $z \in X$
prawa jednostki lewej i prawej: $I \otimes x = x = x \otimes I$ dla wszystkich $x \in X$.
Znamy wiele monoidów. W matematyce monoidy rządzą światem!

Preoid Monoidalny

Preoid monoidalny to zbiór X o relacji $\leqslant$ przekształcającej go w preorder, operacja $\otimes$: $X \times X \to X$ i element $I \in X$ zmieniający go w monoid i spełniający:

$x \leqslant x'$ and $y \leqslant y'$ imply $x \otimes y \leqslant x' \otimes y'$.

Ten ostatni warunek powinien mieć sens: jeśli możesz zamienić jajko w jajko sadzone i zamienić kromkę chleba w tosty, możesz zamienić jajko i kromkę chleba w jajko sadzone i tost!

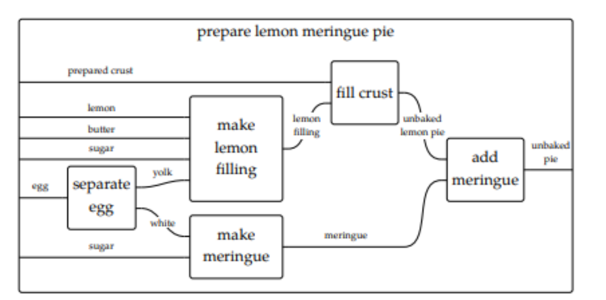
Getting from a to b

Teraz omóimy w jaki sposób preoidy monoidalne mogą pomóc nam w procesach przekształceń (tak jak na wcześniejszym przykładzie).

Rozważamy trzy następujące pytania, które możemy sobie zadać:

- Biorąc pod uwagę to, co mam, czy mogę dostać to, czego chcę?
- Biorąc pod uwagę to, co mam, jaki jest minimalny koszt, aby uzyskać to, czego chcę?
- Biorąc pod uwagę to, co mam, jaki jest zestaw sposobów na uzyskanie tego, czego chcę?

Pokrótce omawiamy podejście do tej idei w celu tworzenia nowych receptur ze starych. Poniższy schemat połączeń pokazuje:
zakładając, że wiesz, jak zaimplementować każde z wewnętrznych pudeł, jak je wdrożyć w celu przygotowania ciasta bezowego z cytryny:


prepare lemon meringue pie
prepared crust
fill crust
lemon
butter
sugar
make lemon filling
lemon filling
unbaked lemon pie
add meringue
unbaked pie
egg
separate egg
yolk
white
sugar
make meringue
meringue

Symmetric monoidal preorders

$(X, \leqslant)$, odnosi się do dwóch elementów struktury: zbioru zwanego X i relacji zwanej $\leqslant$, która jest zwrotna i przechodnia. Chcemy dodać do naszej koncepcji sposób łączenia elementów w X, operację obejmującą dwa elementy i dodającą lub mnożącą je razem. Jednak operacja nie musi dosłownie polegać na dodawaniu lub mnożeniu; musi jedynie spełniać niektóre właściwości, których się od nich oczekuje.

Definition and first examples

Definition 2.2. A *symmetric monoidal structure* on a preorder $(X, \leq)$ consists of two constituents:

(i) an element $I \in X$, called the *monoidal unit*, and

(ii) a function $\otimes : X \times X \to X$, called the *monoidal product*.

These constituents must satisfy the following properties, where we write $\otimes(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2$:

(a) for all $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, if $x_1 \leq y_1$ and $x_2 \leq y_2$, then $x_1 \otimes x_2 \leq y_1 \otimes y_2$,

(b) for all $x \in X$, the equations $I \otimes x = x$ and $x \otimes I = x$ hold,

(c) for all $x, y, z \in X$, the equation $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ holds, and

(d) for all $x, y \in X$, the equation $x \otimes y = y \otimes x$ holds.

We call these conditions *monotonicity*, *unitality*, *associativity*, and *symmetry* respectively. A preorder equipped with a symmetric monoidal structure, $(X, \leq, I, \otimes)$, is called a *symmetric monoidal preorder*.

Przykład

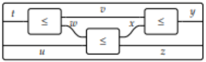
Istnieje dobrze znana struktura oznaczona jako $\leqslant$, na zbiorze R liczb rzeczywistych;
na przykład $-5 \leqslant \sqrt{} 2$.
Proponujemy 0 jako jednostkę monoidalną i $+$: $R \times R \to R$ jako iloczyn monoidalny.
Czy (R, $\leqslant$, 0, $+$) spełnia warunki definicji 2.2 przedstawionej wcześniej?
Jeśli $x1 \leqslant y1$ i $x2 \leqslant y2$, prawdą jest, że $x1 + x2 \leqslant y1 + y2$.
Prawdą jest również, że $0 + x\ x$ i $x + 0\ x$, że $(x + y) + z\ x + (y + z)$ i że $x + y\ y + x$.
Zatem (R, $\leqslant$, 0, $+$) spełnia warunki bycia symetrycznym monoidem.

Introducing wiring diagrams

Wiring diagrams are visual representations for building new relationships from old. In a preorder without a monoidal structure, the only sort of relationship between objects is $\leq$, and the only way you build a new $\leq$ relationship from old ones is by chaining them together. We denote the relationship $x \leq y$ by

We can chain some number of these $\leq$-relationships—say 0, 1, 2, or 3 of them—together in series as shown here

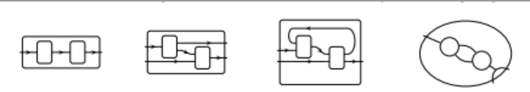
If we add a symmetric monoidal structure, we can combine relationships not only in series but also in parallel. Here is an example:



Agnieszka Mach
Robert Wojtaszek

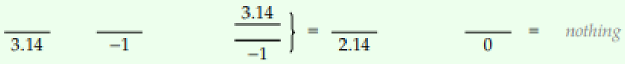
Różne style schematów połączeń

W rzeczywistości później zobaczymy, że istnieje wiele stylów schematów połączeń. Kiedy mamy do czynienia z preorderami wstępnymi schemat, który możemy narysować, jest z pojedynczymi wyjściami połączonymi szeregowo. Kiedy mamy do czynienia z symetrycznymi preoidami możemy mieć bardziej złożone skrzynki i bardziej złożone schematy połączeń, w tym skład równoległy. Później zobaczymy, że w przypadku innych rodzajów struktur kategorycznych istnieją inne style schematów połączeń.

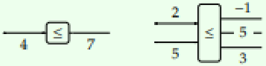


Przykład

Example 2.14. Recall the symmetric monoidal preorder $(\mathbb{R}, \leq, 0, +)$ from Example 2.4. The wiring diagrams for it allow wires labeled by real numbers. Drawing wires in parallel corresponds to adding their labels, and the wire labeled 0 is equivalent to no wires at all.



And here we express a couple facts about $(\mathbb{R}, \leq, 0, +)$ in this language: $4 \leq 7$ and $2+5 \leq -1+5+3$.



Agnieszka Mach
Robert Wojtaszek

Applied examples

Chemistry In high school chemistry, we work with chemical equations, where material collections such as

$$H_2O, \quad NaCl, \quad 2NaOH, \quad CH_4 + 3O_2$$

are put together in the form of reaction equations, such as

$$2H_2O + 2Na \rightarrow 2NaOH + H_2.$$

Zbiór po lewej, 2H2O + 2Na nazywa się reagentem, a zbiór po prawej, 2H2O + 2Na nazywa się produktem. Możemy rozważyć równania reakcji, takie jak powyższe, jako zachodzące w jednym symetrycznym wzmacniaczu monoidalnym (Mat, $\to$, 0, +). Tutaj "Matis"jest zbiorem wszystkich kolekcji atomów i cząsteczek, czasem nazywanych materiałami. Mamy więc NaCl $\in$ Mat i 4H2O + 6Ne $\in$ Mat. Zestaw Mat ma strukturę preorderu oznaczoną symbolem $\to$, który jest preferowanym symbolem w otoczeniu chemii. Dla jasności $\to$ zastępuje relację $\leqslant$ z definicji 2.2.

Symbol + jest preferowanym oznaczeniem produktu monoidalnego w ustawieniach chemicznych, zastępujący $\otimes$. C

Abstract examples

The Booleans The simplest nontrivial preorder is the booleans: $\mathbb{B} = \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$ with $\texttt{false} \leq \texttt{true}$. There are two different symmetric monoidal structures on it.

Example 2.27 (Booleans with AND). We can define a monoidal structure on $\mathbb{B}$ by letting the monoidal unit be `true` and the monoidal product be $\wedge$ (AND). If one thinks of $\texttt{false} = 0$ and $\texttt{true} = 1$, then $\wedge$ corresponds to the usual multiplication operation $*$. That is, with this correspondence, the two tables below match up:

$\wedge$	false	true
false	false	false
true	false	true

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

(2.28)

One can check that all the properties in Definition 2.2 hold, so we have a monoidal preorder which we denote $\textbf{Bool} := (\mathbb{B}, \leq, \texttt{true}, \wedge)$.

Bool will be important when we get to the notion of enrichment. Enriching in a monoidal preorder $\mathcal{V} = (V, \leq, I, \otimes)$ means "letting $\mathcal{V}$ structure the question of getting from a to b." All of the structures of a monoidal preorder—i.e. the set V, the ordering relation $\leq$, the monoidal unit I, and the monoidal product $\otimes$—play a role in how enrichment works.

Monoidal monotone maps

Niech P (P, $\leqslant$P, IP, $\otimes$P) i Q (Q, $\leqslant$Q, IQ, $\otimes$Q) będą preoidami monoidalnymi. Monoidalny monotoniczny od P do Q jest monotoniczną mapą f: (P, $\leqslant$P) $\rightarrow$ (Q, $\leqslant$Q), spełniającą dwa warunki: (a) IQ $\leqslant$Q f (IP) i (b) f (p1) $\otimes$Q f (p2) $\leqslant$Q f (p1 $\otimes$P p2) dla wszystkich p1, p2 $\in$ P. I

stnieją również wzmocnienia tych warunków, które są równie ważne. Jeśli f spełnia następujące warunki, nazywa się ją silnym monoidem monotonicznym: (a ') IQ f (IP) i (b') f (p1) $\otimes$Q f (p2) f (p1 $\otimes$P p2); a jeśli spełnia następujące warunki, nazywa się ją ścisłym monoidem monotonicznym: (a '') IQ f (IP) i (b'') f (p1) $\otimes$Q f (p2) f (p1 $\otimes$P p2)

The monoidal preorder cost

Jak wspomnieliśmy powyżej, wzbogacając się w monoidalne zamówienia(oreders) wstępne, widzimy je jako różne sposoby ustrukturyzowania kwestii „ucieczki stąd" - tam.

Enrichment

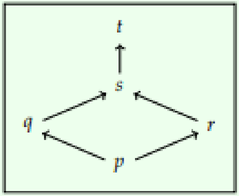
W tej części przedstawimy kategorie V, gdzie V jest symetrycznym monoidalnym preorderem. Zobaczymy, że kategorie Bool są preorderami, a także, że kategorie kosztów to uogólnienie pojęcia przestrzeni metrycznej.

Definicja

Niech V (V, $\leqslant$, I, $\otimes$) będzie symetrycznym monoidalnym preorderem.
X składa się z dwóch składników, spełniających dwie właściwości. Aby określić X,
(i) określa się zbiór Ob (X), którego elementy nazywane są obiektami;
(ii) na każde dwa obiekty x, y, jeden określa element X (x, y) $\in$ V, zwany homobiektem.

2) Powyższe składniki są wymagane do spełnienia dwóch właściwości: (a) dla każdego obiektu x $\in$ Ob (X) mamy I $\leqslant$ X (x, x) i (b) na każde trzy obiekty x, y, z $\in$ Ob (X) mamy X (x, y) $\otimes$ X (y, z) $\leqslant$ X (x, z). Nazywamy V podstawą wzbogacenia dla X lub mówimy, że X jest wzbogacony w V.

Przykład



(2.48)

How does this correspond to a **Bool**-category $\mathcal{X}$? Well, the objects of $\mathcal{X}$ are simply the elements of the preorder, i.e. $\mathrm{Ob}(\mathcal{X}) = \{p, q, r, s, t\}$. Next, for every pair of objects (x, y) we need an element of $\mathbb{B} = \{\mathtt{false}, \mathtt{true}\}$: simply take $\mathtt{true}$ if $x \leq y$, and $\mathtt{false}$ if otherwise. So for example, since $s \leq t$ and $t \not\leq s$, we have $\mathcal{X}(s, t) = \mathtt{true}$ and $\mathcal{X}(t, s) = \mathtt{false}$. Recalling from Example 2.27 that the monoidal unit I of **Bool** is $\mathtt{true}$, it's straightforward to check that this obeys both (a) and (b), so we have a **Bool**-category.

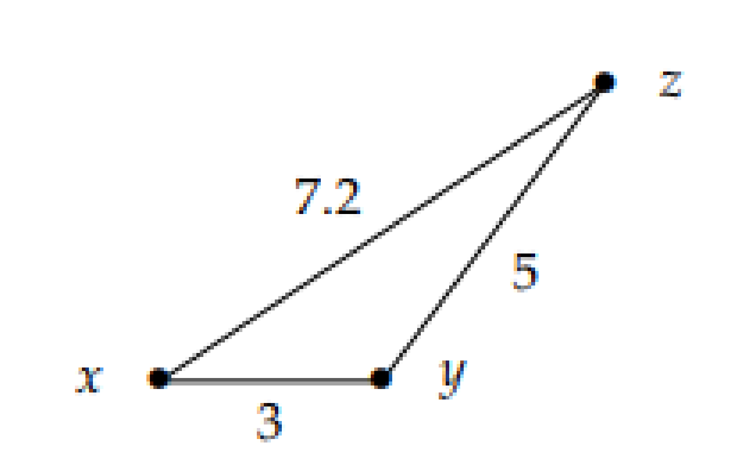
In general, it's sometimes convenient to represent a $\mathcal{V}$-category $\mathcal{X}$ with a square matrix. The rows and columns of the matrix correspond to the objects of $\mathcal{X}$, and the (x, y)th entry is simply the hom-object $\mathcal{X}(x, y)$. So, for example, the above preorder in Eq. (2.48) can be represented by the matrix

$\leq$	p	q	r	s	t
p	true	true	true	true	true
q	false	true	false	true	true
r	false	false	true	true	true

Przestrzenie metryczne lawowe

Przestrzeń metryczna (X, d) składa się z:
(i) zbioru X, którego elementy nazywane są punktami, oraz (ii) funkcji d: $X \times X \to R \geqslant 0$, gdzie wywoływane jest d (x, y) odległość między xiy.
Te składniki muszą spełniać cztery właściwości:
(a) dla każdego $x \in X$, mamy d (x, x) 0,
(b) dla każdego x, $y \in X$, jeśli d (x, y) 0 to xy,
(c) dla każdego x, $y \in X$ mamy d (x, y) d (y, x),
(d) dla każdego x, y, $z \in X$, mamy $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.
Czwarta właściwość nosi nazwę nierówności trójkąta. Jeśli zamiast tego zaimplementujemy w (ii) o funkcję d: $X \times X \to [0, \infty]$ $R \geqslant 0 \cup \infty$ to wywołamy (X, d) (rozszerzoną przestrzeń metryczną).

Nierówność trójkąta mówi, że podczas kreślenia trasy od x do z odległość jest najbardziej prawdopodobna (the distance is always at most what you get) względem wybieranych punktu: pośredniego y i przechodzącego x $\rightarrow$ y $\rightarrow$ z.



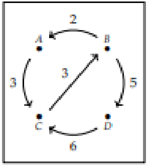
Zależność tę można wywołać na trzy różne sposoby na podstawie powyższego obrazka:

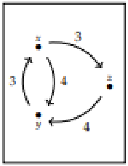
Presenting metric spaces with weighted graphs

Tak jak możemy przekonwertować diagram Hasse w preorder tak rónież można przekształcić dowolny wykres ważony, którego krawędzie są oznaczone liczbami $w \geqslant 0$, w przestrzeń metryczną Lawvere'a. W rzeczywistości rozważymy je jako wykresy oznaczone elementami $[0, \infty]$.

Nazywamy je Cost-weighted graphs (Wykresy ważone kosztami).

One might think of a **Cost**-weighted graph as describing a city with some one-way roads (a two-way road is modeled as two one-way roads), each having some effort-to-traverse, which for simplicity we just call length. For example, consider the following weighted graphs:

$X :=$ 



$=: Y$

Given a weighted graph, one forms a metric d_X on its set X of vertices by setting $d(p,q)$ to be the length of the shortest path from p to q. For example, here is the the table of distances for Y

$d(\nearrow)$	x	y	z
x	0	4	3
y	3	0	6
z	7	4	0

Enriched functor

Niech X i Y będą kategoriami V. Funktor (nie jest on nazwą ani zdaniem, służy do konstrukcji wyrażeń bardziej złożonych) V od X do Y, oznaczony F: X $\rightarrow$ Y, składa się z jednego składnika: (i) funkcji F: Ob (X) $\rightarrow$ Ob (Y) podlegającej jednemu ograniczeniu (a) dla wszystkich x1, x2 $\in$ Ob (X), jeden ma X (x1, x2) $\leqslant$ Y (F (x1), F (x2))

Product V-categories

Niech X i Y będą kategoriami V. Zdefiniujemy ich produkt V lub po prostu produkt, aby był kategorią V $X \times Y$ za pomocą (i) Ob $(X \times Y)$ B Ob $(X) \times$ Ob (Y), (ii) $(X \times Y)$ (x , y), (x 0, y 0) BX (x, x 0) $\otimes$ Y (y, y 0), dla dwóch obiektów (x, y) i (x 0, y 0) w Ob $(X \times Y)$

Agnieszka Mach
Robert Wojtaszek

Exercise 2.78. Consider $\mathbb{R}$ as a Lawvere metric space, i.e. as a **Cost**-category (see Example 2.54). Form the **Cost**-product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. What is the distance from $(5,6)$ to $(-1,4)$? Hint: apply Definition 2.74; the answer is not $\sqrt{40}$. ◊

In terms of matrices, $\mathcal{V}$-products are also quite straightforward. They generalize what is known as the Kronecker product of matrices. The matrices for $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ in Eq. (2.77) are shown below

$\mathcal{X}$	A	B	C
A	0	2	5
B	∞	0	3
C	∞	∞	0

$\mathcal{Y}$	p	q
p	0	5
q	8	0

and their product is as follows:

$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	(A,p)	(B,p)	(C,p)	(A,q)	(B,q)	(C,q)
(A,p)	0	2	5	5	7	10
(B,p)	∞	0	3	∞	5	8
(C,p)	∞	∞	0	∞	∞	5
(A,q)	8	10	13	0	2	5
(B,q)	∞	8	11	∞	0	3
(C,q)	∞	∞	8	∞	∞	0

We have drawn the product matrix as a block matrix, where there is one block—shaped like $\mathcal{X}$—for every entry of $\mathcal{Y}$. Make sure you can see each block as the $\mathcal{X}$-matrix shifted by an entry in $\mathcal{Y}$. This comes directly from the formula from Definition 2.74 and the fact that the monoidal product in **Cost** is +.

Przykład

Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi Lawvere'a (i.e. kategorie kosztów) zdefiniowanymi przez następujące wykresy:

Exercise 2.78. Consider $\mathbb{R}$ as a Lawvere metric space, i.e. as a **Cost**-category (see Example 2.54). Form the **Cost**-product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. What is the distance from $(5, 6)$ to $(-1, 4)$? Hint: apply Definition 2.74; the answer is not $\sqrt{40}$. ◊

In terms of matrices, $\mathcal{V}$-products are also quite straightforward. They generalize what is known as the Kronecker product of matrices. The matrices for $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ in Eq. (2.77) are shown below

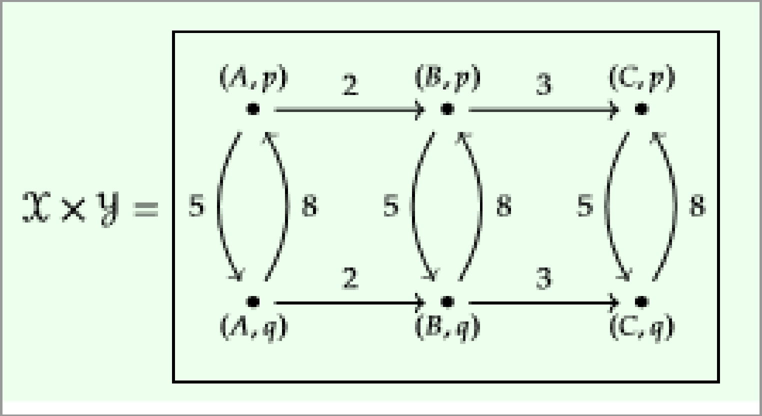
$\mathcal{X}$	A	B	C
A	0	2	5
B	∞	0	3
C	∞	∞	0

$\mathcal{Y}$	p	q
p	0	5
q	8	0

and their product is as follows:

$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	(A, p)	(B, p)	(C, p)	(A, q)	(B, q)	(C, q)
(A, p)	0	2	5	5	7	10
(B, p)	∞	0	3	∞	5	8
(C, p)	∞	∞	0	∞	∞	5
(A, q)	8	10	13	0	2	5
(B, q)	∞	8	11	∞	0	3

Produkt jest zdefiniowany przez wykonanie produktu z zestawów obiektów, gdzie istnieje:
sześć obiektów w X $\times$ Y oraz dystans X $\times$ Y ((x, y), (x0, y0)) pomiędzy wieloma punktami jest podawany przez byx dX (x, x0) + dY (y, y0).



Computing presented V-categories with matrix multiplication

Aby skonstruować macierzową kategorię kosztów używamy ogólnego mnożenia macierzy. Pokażemy, że działa to nie tylko dla kosztu, ale także dla Bool i wielu innych monoidalnych preorderów. Właściwością wymaganą w przedsprzedaży jest bycie jednolitym, przemiennym rozmiarem.
Są to preordery ze wszystkimi złączeniami oraz jednym dodatkowym składnikiem, które są zamknięte w postaci monoidalnej.

Monoidal Closed Preorders

Monoidal Closed Preorders V = $(V, \leqslant, I, \otimes)$ nazywa się symetrycznym mon oidem zamkniętym (lub właśnie zamkniętym), jeśli na każde dwa elementy v, w $\in$ V przypada element v (w V, zwany elementem domowym), z właściwością $(a \otimes v) \leqslant$ w i [U+FB00] a $\leqslant$ (v (w) dla wszystkich a, v, w $\in$V.

Quantales

Jednolity kwant przemienny jest symetrycznym monoidem $V = (V, \leqslant, I, \otimes)$, który ma wszystkie sprzężenia.

Koniec

Prezentacje Przygotowali:
Agnieszka Mach
Robert Wojtaszek