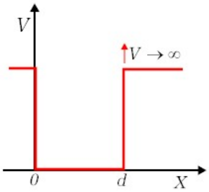
# Studnia potencjału jednowymiarowa

Maciej Skwara, Adrian Rymut

08.02.2019

Rozwiązywanie równania Schrodingera nie należy na ogół do zadań łatwych, ale właśnie rozwiązania tego równania odzwierciedlają korpuskularno-falowe własności obiektów, które chcemy poznać. Własności te pojawiają się jako wynik nałożenia na funkcje stanowiące rozwiązania równania Schrödingera pewnych standardowych warunków: funkcje własne oraz ich pochodne muszą być jednoznaczne, skończone i ciągłe (poza niektórymi punktami osobliwymi).

Rozważymy tu jeden z najprostszych przypadków, kiedy cząstka znajduje się w nieskończenie głębokiej studni potencjału.
Rysunek przedstawia jednowymiarową studnię potencjału szerokości d i o głębokości V. Oznacza to, że energia potencjalna cząstki w funkcji położenia określona jest zależnością.




$$V(x) = \begin{cases} 0 = & 0 < x < d \\ \infty = & x \leq 0, x \geq d \end{cases}$$

My rozważać będziemy przypadek kiedy: $V = \infty$

W obszarze gdzie $V = 0$, czyli $0 < x < d$ dla równanie Schrödingera ma postać:

### Równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x)$$

Wprowadźmy oznaczenie:
$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
Zatem ostatecznie funkcja przybiera postać:

**Równanie Schrödingera**

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \psi(x) = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są funkcje sinusoidalne, które można przedstawić w różnej postaci np. jako
$\psi(x) = Asin(kx + \varphi)$

Wprowadźmy oznaczenie:
$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
Zatem ostatecznie funkcja przybiera postać:

### Równanie Schrödingera

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \psi(x) = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są funkcje sinusoidalne, które można przedstawić w różnej postaci np. jako
$\psi(x) = Asin(kx + \varphi)$

Weźmy pod uwagę drugie z tych rozwiązań i nałóżmy na nie warunki naszego przykładu. Pamiętaj, że $\psi(0) = 0$ otrzymujemy warunek:

$\psi(0) = Asin(\varphi) = 0$

Wynika z tego natychmiast, że w naszym przypadku $\psi(0)$. Drugi warunek dotyczy zerowania się funkcji na drugiej krawędzi potencjału

$\psi(d) = Asin(kd) = 0$, zatem $kd = \pm n\pi$ gdzie $n = 1, 2, 3...$

Weźmy pod uwagę drugie z tych rozwiązań i nałóżmy na nie warunki naszego przykładu. Pamiętaj, że $\psi(0) = 0$ otrzymujemy warunek:
$\psi(0) = Asin(\varphi) = 0$
Wynika z tego natychmiast, że w naszym przypadku $\psi(0)$. Drugi warunek dotyczy zerowania się funkcji na drugiej krawędzi potencjału
$\psi(d) = Asin(kd) = 0$, zatem $kd = \pm n\pi$ gdzie $n = 1, 2, 3...$

Biorąc pod uwagę związek $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ widzimy, że energia cząstki w studni potencjału może przyjmować tylko dyskretne wartości określone przez relację

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} n^2$$

Funkcje własne odpowiadające tym energiom otrzymamy wstawiając w argumencie funkcji sinus wyrażenie określające dozwolone w naszym przypadku wartości k. Otrzymujemy wtedy:
$\psi_n(x) = Asin(\frac{n\pi}{d}x)$

Współczynnik $A$ możemy wyznaczyć z warunku normalizacji zastosowanego tu do przypadku jednowymiarowego. Otrzymujemy warunek:

$$\mathrm{A}^2 \int_0^d sin^2(\frac{n\pi}{d}x)dx = 1$$

z obliczeń wynika że $A = \sqrt{\frac{2}{d}}$

Ostatecznie rozwiązując równanie Schrödingera funkcje własne dla naszego przypadku mają więc postać:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} sin(\frac{n\pi}{d} x)$$