Rozwiązywanie równania Laplace'a

Tomasz Śmiech ; Rafał Kolaska

08.02.2019

1 Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień elektorstatyki jest znalezienie pola elektrycznego wytwarzanego przez dany statyczny rozkład ładunku.
Możemy to osiągnąć znajdując potencjał pola:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{R} d\tau$$

Jednak, gęstość ładunku ρ może nie być znana z góry, ponieważ ładunki mogą się przemieszczać. Naszej kontroli podlega jedynie całkowity ładunek w przewodniku.

2 Równanie Laplace'a

Chcąc obliczyć wartość potencjału w obszarze otaczającym pewien ładunek całkowity stosujemy równanie Poissona:

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho,$$

Jednak często nie interesuje nas obszar, w którym znajduje się ładunek, a jedynie przestrzeń poza nim. Wówczas do obliczenia potencjału stosujemy równanie Laplace'a:

$$\Delta V = 0,$$

3 Warunki brzegowe

W naszych obliczeniach przyjmujemy obszar kwadratu o boku 35 i zadane potencjały na brzegach tego kwadratu.

4 Rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Rozwiązujemy metodą różnic skończonych.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{[V(x+a,y) + V(x-a,y) - 2V(x,y)]}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{[V(x,y+a) + V(x,y-a) - 2V(x,y)]}{a^2}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{4}[V(x+a,y) + V(x-a,y) + V(x,y+a) + V(x,y-a)]$$

5 Rozwiązywanie układu równań metodą Gaussa-Seidla

Dla N punktów mamy N równań:

$$Av = b$$

gdzie:
A - macierz współczynników,
v - wektor wartości potencjałów w punkcie na płaszczyźnie,
b - wektor wyrazów wolych (warunki brzegowe),

Rozwiązanie otrzymujemy w postaci:

$$v^{(k+1)} = (D+L)^{-1}(-Uv^{(k)} + b)$$

gdzie:
D - macierz diagonalna,
L - Macierz dolnotrójkątna,
U - macierz górnotrójkątna,
k - iteracja,
b - wektor wyrazów wolych (warunki brzegowe),
v - wektor wartosci potencjałów,
$A = D + U + L$ Warunek zbieżności (Kryterium słabej dominacji w rzędach) :
Jeżeli wszystkie wyrazy diagonalne macierzy nieredukowalnej A dominują rzędami w sensie słabym

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

dla $i = 1, 2, ..., n$

oraz jeżeli dla co najmniej jednego wiersza i zachodzi dominacja silna

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

to ciąg iteracji Gaussa-Seidla jest zbieżny

6 Wykonanie programu

Program wykonaliśmy w języku c++ za pomocą środowiska Visual Studio 2017. Wykres stworzyliśmy z pomocą frameworka root.