Rozwiązanie Równania Laplace'a

Tomasz Śmiech i Rafał Kolaska

Krakow, 08.01.2019 r.

Potencjał pola elektrostatycznego

Jednym z podstawowych zagadnień elektorstatyki jest znalezienie pola elektrycznego wytwarzanego przez dany statyczny rozkład ładunku.
Możemy to osiągnąć znajdując potencjał pola:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{R} d\tau$$

Jednak, gęstość ładunku ρ może nie być znana z góry, ponieważ ładunki mogą się przemieszczać. Naszej kontroli podlega jedynie całkowity ładunek w przewodniku.

Potencjał pola elektrostatycznego

Zapisujemy problem w postaci różniczkowej:

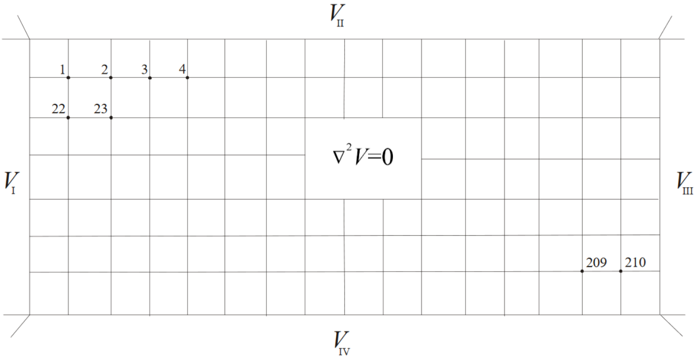
$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Równanie Poissona dla obszaru z ładunkiem.

$$\Delta V = 0$$

Równanie Laplace'a dla obszaru bez ładunku.

Numeryczne rozwiązanie Równania Laplace'a 2D



Rys. 3 Prostokątny obszar obliczeń, ze znanymi wartościami potencjału na brzegach

Numeryczne rozwiązanie Równania Laplace'a 2D

Tomasz Śmiech i Rafał Kolaska

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Rozwiązujemy metodą różnic skończonych.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{[V(x+a,y) + V(x-a,y) - 2V(x,y)]}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{[V(x,y+a) + V(x,y-a) - 2V(x,y)]}{a^2}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{4}[V(x+a,y)+V(x-a,y)+V(x,y+a)+V(x,y-a)]$$

Numeryczne rozwiązanie Równania Laplace'a 2D

Tomasz Śmiech i Rafał Kolaska

Dla N punktów mamy N równań:

$$Av = b$$

gdzie:
A - macierz współczynników,
v - wektor wartości potencjałów w punkcie na płaszczyźnie,
b - wektor wyrazów wolych (warunki brzegowe),

Metoda Gaussa-Seidla

Rozwiązanie otrzymujemy w postaci:

$$v^{(k+1)} = (D + L)^{-1}(-Uv^{(k)} + b)$$

gdzie:
D - macierz diagonalna,
L - Macierz dolnotrójkątna,
U - macierz górnotrójkątna,
k - iteracja,
b - wektor wyrazów wolych (warunki brzegowe),
v - wektor wartosci potencjałów,
$A = D + U + L$

Metoda Gaussa-Seidla

Warunek zbieżności (Kryterium słabej dominacji w rzędach) :
Jeżeli wszystkie wyrazy diagonalne macierzy nieredukowalnej A dominują rzędami w sensie słabym

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

dla $i = 1, 2, ..., n$
oraz jeżeli dla co najmniej jednego wiersza i zachodzi dominacja silna

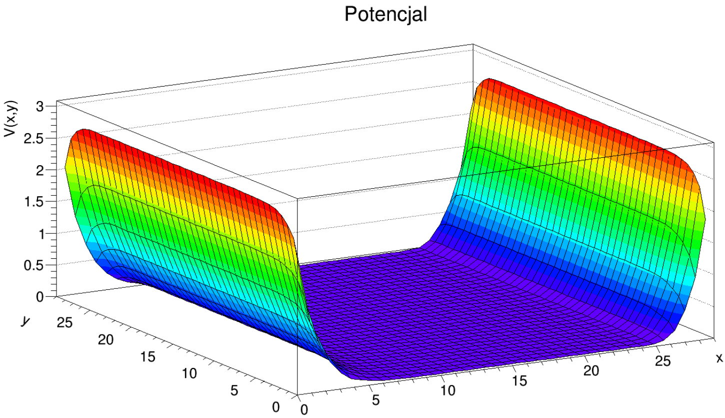
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

to ciąg iteracji Gaussa-Seidla jest zbieżny

Wynik

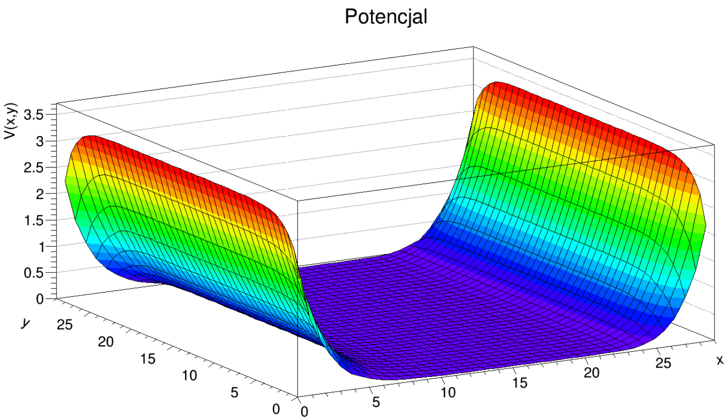
Rozwiązanie Równania Laplace'a

Tomasz Śmiech i Rafał Kolaska



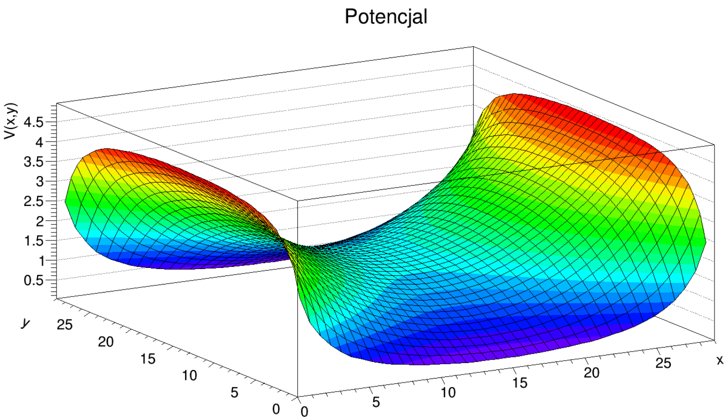
iteracja = 5

Wynik



iteracja = 10

Wynik



iteracja = 150

Bibliografia

http://ks.zut.edu.pl/pliki/mm_lab5_c.pdf

http://www.algorytm.org/procedury-numeryczne/metoda-gaussa-seidela.html

http://www.ikb.poznan.pl/almamater/wyklady/metody_komputerowe_i/wykl_metody_komputerowe_06_mrs.pdf