NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO.

M. G. T. P.

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

8 luty 2019

Plan.

1. Równanie przewodnictwa cieplnego.
2. Problem rozkładu temperatury w cienkim pręcie.
3. Analiza numeryczna.
4. Elementy kodu programu.
5. Wyniki.
6. Bibliografia.

Równanie przewodnictwa cieplnego.

Równanie przewodnictwa cieplnego jest to równanie różniczkowe cząstkowe, opisujące przepływ ciepła przy zadanym jego początkowym rozkładzie w ośrodku, oraz przy określonych warunkach brzegowych. Równanie w jednym wymiarze ma postać:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

gdzie α jest dyfuzyjnością cieplną.

Problem rozkładu temperatury w cienkim pręcie.

Rozważmy cienki pręt o długości L. Niech $T(x,t)$ będzie rozkładem temperatury w pręcie w czasie t. Końce pręta utrzymywane są w stałej temperaturze $T(0,t) = T(L,t) = T_0$. Jeśli początkowy rozkład temperatury w pręcie jest zadany przez $T(x,0)$ to rozkład temperatury w dowolnej chwili czasu może być wyznaczony z równania przewodnictwa cieplnego (1). Zdefiniujmy bezwymiarową funkcję:

$$u(x,t) = \frac{T(xL, \frac{L^2}{\alpha}t) - T_0}{T_0}, \tag{2}$$

gdzie $x \in [0,1]$. Równanie (1) przyjmie postać:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3}$$

z warunkami $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Analiza numeryczna.

Numeryczne rozwiązanie równania (3) zostanie znalezione dla przedziału $x \in [0, 1]$ i $t \in [0, t_k]$. Równanie różniczkowe zostanie przybliżone przez równanie różnicowe z wykorzystaniem dwuwymiarowej skończonej siatki. Siatka składa się z N_x punktów przestrzennych i N_t punktów czasowych. Funkcja $u(x, t)$ jest aproksymowana przez swoje wartości w punktach siatki:

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j), \tag{4}$$

gdzie:
$x_i = (i - 1)\triangle x, \qquad i = 1, ..., N_x,$
$t_j = (j - 1)\triangle t, \qquad j = 1, ..., N_t.$

Analiza numeryczna.

Pochodne występujące w równaniu zastępujemy przez:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\triangle t}(u_{i,j+1} - u_{i,j}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\triangle x)^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}), \tag{6}$$

gdzie:

$$\triangle x = \frac{1}{N_x - 1}, \qquad \triangle t = \frac{t_k}{N_t - 1}. \tag{7}$$

Wstawiając wyrażenia (5) i (6) do równania (3) otrzymujemy:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}). \tag{8}$$

Elementy kodu programu.

```
# include <iostream>      // obsługa operacji wejścia/wyjścia
# include <fstream>       // obsługa plików
# include <cstdlib>       // biblioteka zawierająca funkcje ogólne
# include <string>        // manipulowanie napisami
# include <cmath>         // biblioteka matematyczna
```

Elementy kodu programu.

Deklaracje i definicje parametrów:

```
const int M = 100000;

double u[M];

double uxx[M];

double x , t , dx , dt , tk , wsp;

int i , j , Nx , Nt;
```

Elementy kodu programu.

Deklaracje i definicje parametrów:

```
dx = 1.0 / (Nx - 1);

dt = tk / (Nt - 1);

wsp = dt / ( dx * dx );
```

Dane podawane przez użytkownika:

```
cout << "Podaj: tk, Nx, Nt: " << endl;
```

Elementy kodu programu.

Wybrany warunek początkowy $u(x, 0) = sin(\pi x)$:

```
for (i = 0 ; i < Nx ; i++)
{
    x = i * dx;
    u[i] = sin(M_PI * x);
}
u[0] = 0.0;
u[Nx-1] = 0.0;
```

Elementy kodu programu.

Obliczanie ewolucji czasowej:

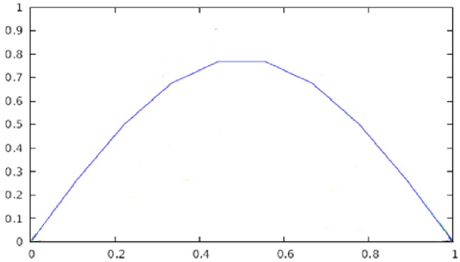
```
for (j = 1 ; j < Nt ; j++)
{
    t = j * dt;
    for (i = 1 ; i < Nx - 1 ; i++)
    {
        uxx[i] = wsp * (u[i + 1] - 2.0 * u[i] + u[i - 1]);
    }
    for (i = 1 ; i < Nx - 1 ; i++)
    {
        u[i] += uxx[i];
    }
```

Elementy kodu programu.

```
for (i = 0 ; i < Nx ; i++)
{
    x = i * dx;
    myfile << t << " " << x << " " << u [i] << endl;
}
myfile << endl;
}
```

Wyniki.

Dla zadanych parametrów N_x, N_t i t_k program wyznacza i zapisuje w pliku *dane.dat* wartości $(t_j, x_i, u_{i,j})$ z których można sporządzić wykres rozkładu temperatury w zależności od położenia i czasu.



Rysunek: Wykres zależności funkcji u(x) dla wybranej chwili czasu.

Bibliografia.

Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski.
Metody numeryczne.
PWN 2019, Warszawa.

A. K. Prykarpatski.
Równania fizyki matematycznej.
Skrypt AGH 2002, Kraków.