

Projekty zaliczeniowe Klasyczna Teoria Pola 2018/2019 Zima

Uwagi ogólne:

- 1) Należy podzielić się na grupy 1-3 osób.
- 2) Każda grupa powinna wybrać jeden z poniższych projektów – proszę się porozumieć, żeby tematy się nie powtarzały. W razie pytań proszę się ze mną skontaktować – im wcześniej tym lepiej. Dla przykładu: konsultacje dzień przed prezentacją będą uznawane za brak pracy nad projektem – mają Państwo ponad miesiąc, aby przeanalizować temat dogłębnie konsultując się ze mną w razie problemów.
- 3) Proszę przygotować prezentację z wybranego tematu w postaci LaTeX (pdf). Prezentacja jest skierowana do Waszych koleżanek i kolegów, więc powinna umożliwiać zrozumienie im tego tematu. Proszę nie wklejać bezmyślnie wszystkich wzorów i stwierdzeń tylko starać się umiejętnie motywować to co się pojawi na slajdach aby były powiązane logicznie i przedstawiały sensowny tok rozumowania.

Czas prezentacji to ok 30 min na temat + pytania. Możemy zwiększyć czas do 45 min na prośbę.

Tematy

1. Entropia (30 min)

Celem projektu jest analiza pojęcia entropii. Proszę rozpocząć od analizy ogólnego pojęcia entropii związanego z uporządkowaniem stanów opisanego w [1]. Następnie proszę przeanalizować przypadek w którym zakłada się, że przestrzeń stanów jest rozmaitością. Wówczas istnienie entropii wynika z twierdzenia Frobeniusa [2], rozdział 6.1. Proszę przeanalizować drugą zasadę termodynamiki w ujęciu Caratheodoriego [2], rozdział 6.3.

[1] Elliott H. Lieb, Jakob Yngvason, „A GUIDE TO ENTROPY AND THE SECOND LAW OF THERMODYNAMICS”, Notices Amer. Math. Soc., 45, (1998) 571-581; <https://arxiv.org/abs/math-ph/9805005v1>

[2] Ted Frankel, „Geometry of Physics”, Cambridge 2nd edition

2. Geometria powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej (30 min)

Proszę przeanalizować pojęcie pierwszej i drugiej fundamentalnej formy powierzchni z [1], rozdział 8.1. Następnie proszę omówić pojęcie krzywizny Gaussa [1], rozdział 8.2. Proszę również omówić twierdzenie Gaussa Theorema Egregium z rozdziału 8.5 z [1].

[1] Ted Frankel, „Geometry of Physics”, Cambridge 2nd edition

3. Geodetyki (30 min)

Ten projekt wiąże się z projektem 2, więc grupy powinny ze sobą współpracować.

Celem jest omówienie pojęcia geodetyki, jako „najprostsza” linia na powierzchni będąca odpowiednikiem linii prostej na płaszczyźnie. Proszę posłużyć się rozdziałem 8.5 z [1]. Proszę również omówić pojęcie pochodnej kowariantnej („intrinsic derivative”) z rozdziału 8.7 z [1], a także transport równoległy wektora wzdłuż krzywej przy użyciu pochodnej kowariantnej ze wspomnianego rozdziału. Następnie proszę omówić ogólne własności pochodnej kowariantnej, koneksji metrycznej oraz krzywizny koneksji metrycznej na powierzchni Riemanna opisanej w rozdziale 9.1-9.2 z [1].

Proszę się również posiłkować [2].

[1] Ted Frankel, „Geometry of Physics”, Cambridge 2nd edition

[2] Jerzy Kijowski, „Geometria jako narzędzie nauk przyrodniczych”, Wydawnictwo PW

4. Algebry Liego i reprezentacje bozonowe oraz fermionowe (30 min)

Proszę omówić pojęcie algebry Liego opierając się na rozdziałach 4.1-4.8 z [1]. Proszę wyjaśnić pojęcie algebry Liego jako linearyzacji ciągłej grupy Liego (przestrzeń styczna do grupy Liego), komutator i jego własności, odwzorowanie Exp i Ln , stałe struktury algebry Liego, reprezentacja regularna oraz struktura algebr Liego (proste, półproste, redukowalne, nieredukowalne). Proszę podać przykłady algebr Liego $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ i $\mathfrak{so}(3)$.

Proszę podać definicję i wybrane (fizyczne) przykłady algebry bozonowej i fermionowej indukowanej przez algebrę Liego opierając się na rozdziale 6 z [1].

[1] Robert Gilmore, „Lie groups, physics and geometry”, Cambridge

5. Defekty topologiczne w materiałach uporządkowanych (30 min)

Proszę omówić pojęcie grupy fundamentalnej – od pętli przez homotopie, „mnożenie” pętli oraz grupę podstawową (fundamental group). Proszę posłużyć się rozdziałem III z [1].

Proszę zaprezentować kilka przykładów obliczeń grup podstawowych dla wybranych materiałów, np. układy spinów, nematyki, nadciekły hel 3 – rozdział V.B z [1].

Proszę również przedstawić pojęcie i przykłady defektów w wybranych materiałach – rozdział I oraz VII.E z [1].

Proszę się również posiłkować rozdziałem 9 z [2].

[1] N. D. Mermin, „The topological theory of defects in ordered media”, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 – (1979)

[2] Nash, Sen, „Topology and Geometry for Physicists”, Dover

6. Całki po trajektoriach w przestrzeniach niejednostopnych (30 min)

Proszę omówić pojęcie całki po trajektoriach w przestrzeniach niejednostopnych (proszę te pojęcia zdefiniować) opierając się na artykule [1]. Proszę przedstawić przykłady: efekt Aharonova-Bohma przy użyciu całek po trajektoriach, a także zachowanie się bezspinowych cząstek w niskiej liczbie wymiarów – anyony. Te przykłady również są opisane w [1].

Mogą się Państwo również posiłkować rozdziałem 23 z [2].

[1] Fumika Suzuki, „Homotopy and Path Integrals”, <https://arxiv.org/abs/1107.1459>

[2] L.S Schulman, „Techniques and Applications of Path Integration”, Dover

7. Jety i geometryczna teoria równań różniczkowych (30 min)

Proszę omówić pojęcie jetu (sekcji) jako uogólnienie przestrzeni stycznej. Należy wspomnieć o współrzędnych jetu, strukturze kontaktowej (formie Cartana), transformacjach kontaktowych. Informacje te znajdują Państwo w rozdziale 1 skryptu [1]. Następnie proszę omówić pojęcie równania różniczkowego zapisanego w przestrzeni jetów ([1], rozdział 2.1).

Mogą się również Państwo posiłkować [2-4].

- [1] Alexei G. Kushner, “Three Lectures on Contact Geometry of Monge-Ampere Equations”, skrypt
- [2] A. M. Vinogradov, I. S. Krasilshchik et al., “Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics”, AMS
- [3] Alexei Kushner, Valentin Lychagin, Vladimir Rubtsov, “Contact Geometry and Non-linear Differential Equations”, Cambridge
- [4] Peter J. Olver, “Applications of Lie Groups to Differential Equations”, Springer