

Zbiór Cantora - raport

M.G. T.P.

Luty 2019

Motywacją do wygłoszenia prezentacji na temat zbioru Cantora była chęć zbadania jak przy pomocy programowania funkcyjnego (Haskell) można dokonać generowania fraktali. Zbiór Cantora jest to podzbiór prostej rzeczywistej opisany w 1883 roku przez niemieckiego matematyka Georga Cantora. Zbiór ten odkrył w 1875 roku Henry Smith. Zbiór Cantora jest najprostszym przykładem fraktala. Fraktal w znaczeniu potocznym oznacza zwykle obiekt samopodobny (tzn. taki, którego części są podobne do całości) albo „nieskończenie złożony” (ukazujący coraz bardziej złożone detale w dowolnie wielkim powiększeniu). Do konstrukcji zbioru Cantora użyty został następujący algorytm. Klasyczny zbiór Cantora definiujemy jako podzbiór przedziału domkniętego $C_0 = [0, 1]$ liczb rzeczywistych wyznaczony przez następującą konstrukcję. Indukcyjnie wybieramy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych (C_0, C_1, C_2, \dots) , takich że zbiór C_n jest sumą 2^n rozłącznych odcinków domkniętych. Przypuścimy, że wyznaczyliśmy już zbiór C_n tak, że jest sumą 2^n rozłącznych odcinków domkniętych. Każdy z 2^n odcinków tworzących ten zbiór dzielimy na 3 rozłączne odcinki równej długości z których środkowy odcinek jest otwarty, a odcinki skrajne są domknięte. Wyrzucamy ze zbioru C_n wszystkie środkowe odcinki otwarte kładąc $C_{n+1} = C_n \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{2^n})$. Można sprawdzić, że zbiór C_{n+1} jest sumą 2^{n+1} rozłącznych odcinków domkniętych. Po zakończeniu procesu indukcyjnego, gdy ciąg (C_0, C_1, C_2, \dots) jest wyznaczony, definiujemy zbiór Cantora jako część wspólną tego ciągu. Algorytm ten został zaimplementowany w języku Haskell, który jest czysto funkcyjnym językiem programowania nazwanym na cześć Haskella Curry’ego. Wyniki działania programu zostały zaprezentowane w prezentacji.