Geometria powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej

Grzegorz Wolanin, Michał Adamek, Andrzej Kozioł

WMFiI
Politechnika Krakowska

8 lutego 2019

Plan

Powierzchnia

Powierzchnia to dwuwymiarowa podprzestrzeń zanurzona w przestrzeni trójwymiarowej.

Niech $M^2 \subset R^3$ będzie powierzchnią. Dla każdego punktu $x \in M^2$ przestrzeń styczna TM_x jest wyposażona w dwie formy dwuliniowe związane z geometrycznymi własnościami powierzchni. Nazywamy je I i II formą fundamentalną powierzchni.

Pierwsza forma fundamentalna powierzchni

Gaussowska parametryzacja powierzchni

Dla powierzchni M^2 zanurzonej w przestrzni R^3 istnieje przestrzeń styczna $TM_x \subset R^2$, która posiada iloczyn skalarny będący obcięciem iloczynu skalarnego z R^3. Oznaczymy go w ten sposób:

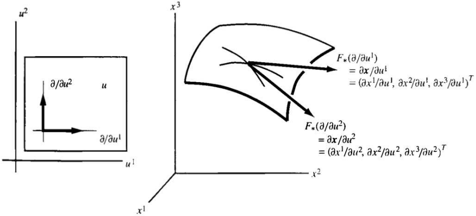
$G_x : TM_x \times TM_x \to R$,
przekształcenie to jest formą dwuliniową.

Wyznaczymy współczynniki tej formy w bazie przestrzeni stycznej zadanej przez parametryzację: $R^2 \supset U \xrightarrow{F} M^2$ o współrzędnych $x = (x^1, x^2, x^3)$ wokół punktu $x(u) = x \in M^2$

Pierwsza forma fundamentalna powierzchni

Gaussowska parametryzacja powierzchni

$M^2 = F(U)$, gdzie $U \subset R^2$



Krzywa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ która leży na M^2 jest obrazem krzywej $u^\alpha = u^\alpha(t)$, stąd $\mathbf{x} = \mathbf{x}[u(t)]$

Pierwsza forma fundamentalna powierzchni

Po zróżniczkowaniu wektora $\mathbf{x}$ i zastosowaniu reguły łańcuchowej otrzymujemy:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\right)\frac{du^\alpha}{dt} = \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt},$$

gdzie:

$$\mathbf{x}_\alpha := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2$$

są wektorami bazy w przestrzeni stycznej do M^2 w każdym punkcie wyznaczone przez parametryzację x.

Pierwsza forma fundamentalna powierzchni

Iloczyn skalarny pary wektorów stycznych w przestrzeni M^2 ma postać:

$$< \mathbf{A}, \mathbf{B} > = < \mathbf{x}_\alpha A^\alpha, \mathbf{x}_\beta A^\beta > = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$$

gdzie współczynniki formy są postaci:

$$g_{\alpha\beta} = < \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta > = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \right)$$

Pierwsza forma fundamentalna powierzchni

Iloczyn skalarny wektorów inifinitezymalnego przesunięcia $< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >$ pozwala wprowadzić element liniowy postaci:

$ds^2 =< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >=< \mathbf{x}_\alpha du^\alpha, \mathbf{x}_\beta du^\beta >= g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$

Ta forma kwadratowa jest pierwszą fundamentalną formą powierzchni.

Druga forma fundamentalna powierzchni

Drugim istotnym obiektem w zagadnieniu form fundamentalnych jest wektor normalny $\mathbf{N}$. Jest to wektor prostopadły do płaszczyzny stycznej do powierzchni w danym punkcie.

Niech $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \|}$ będzie jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni M^2 w punkcie (u^1, u^2). Mając wektor styczny $\mathbf{X} = \mathbf{x}_\alpha X^\alpha$ w punkcie (u^1, u^2), niech $u^\alpha = u^\alpha(t)$ będzie krzywą na powierzchni M^2 z wektorem stycznym $\mathbf{X}$ w $u^\alpha = 0$, $X^\alpha = \dfrac{du^\alpha}{dt}$

Druga forma fundamentalna powierzchni

Odwzorowanie

$$\mathbf{X} \to -\mathbf{N}_\alpha X^\alpha = -X^\alpha \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^\alpha} = b(\mathbf{X})$$

definiuje odwzorowanie liniowe postaci $b : M^2_{u,v} \to M^2_{u,v}$

Niech b^α_β będzie macierzą w odniesieniu do bazy $\mathbf{x}_\alpha$

stąd

$$b(\mathbf{x}_\beta) = \mathbf{x}_\alpha b^\alpha_\beta = -\mathbf{N}_\beta$$

Druga forma fundamentalna powierzchni

Wzdłuż dowolnej krzywej $u = u(t)$ na powierzchni, po zróżniczkowaniu $\mathbf{N}$ otrzymujemy:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = -\mathbf{x}_\alpha b^\alpha_\beta \left(\frac{du^\beta}{dt} \right)$$

następnie możemy wprowadzić formułę na drugą fundamentalną formę powierzchni:

$$B = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

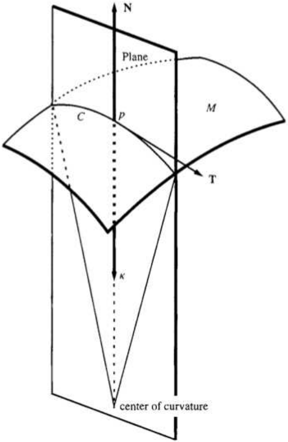
Pojęcie krzywizny Gaussa

Dana jest krzywa C zdefiniowana parametrycznie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ na powierzchni M^2 w R^3. Niech dany będzie również wektor styczny T do powierzchni M^2 w punkcie p oraz niech P będzie płaszczyzną rozpiętą na wektorze stycznym T i wektorze normalnym N w punkcie p. Płaszczyzna P przecina krzywą C na powierzchni M. Ślad krzywej C sparametryzowanej długością łuku zawiera się w przekroju normalnym powierzchni M^2 w punkcie p.

Wektor krzywizny $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\mathbf{n}$ wskazuje od punktu p w kierunku centrum krzywizny, stąd

$$B(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \pm\kappa$$

Pojęcie krzywizny Gaussa



Pojęcie krzywizny Gaussa

Zdefiniujmy krzywizny główne powierzchni M w punkcie p:

$$\kappa_1(p) = \max B(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \qquad \kappa_2(p) = \min B(\mathbf{T}, \mathbf{T})$$

κ_1 i κ_2 są wektorami własnymi tensora b i odpowiednich głównych kierunków wektora T_α.

$$b(\mathbf{T}_\alpha) = \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2$$

Pojęcie krzywizny Gaussa

Zdefiniujmy dwie miary krzywizny na powierzchni M^2 w punkcie p:

- krzywizna Gaussa $= K := \det b = \dfrac{\det(b_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})} = \kappa_1 \kappa_2$
- krzywizna średnia$= H := trb = \sum b^{\alpha}_{\alpha} = \kappa_1 + \kappa 2$

Gauss - Theorema Egregium

Równania Gaussa i Codazziego

$$R^{\tau}_{\alpha\gamma\beta} = b^{\tau}_{\gamma} b_{\alpha\beta} - b^{\tau}_{\beta} b_{\alpha\gamma}$$

$$\partial_{\gamma} b_{\alpha\beta} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} b_{\tau\beta} = \partial_{\beta} b_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} b_{\tau\gamma}$$

Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Rozważmy mapy geograficzne. Niech $\phi : S_a^2$ oznacza jakąś część powierzchni R^2, gdzie S_a jest częścią sfery o promieniu a. Aby stworzyć mapę części sfery na płaskiej powierzchni dwuwymiarowej oczekujemy zachowania odległości, dla uproszczenia przyjmujemy w skali o wartości 1.

Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Długość krzywej $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ na powierzchni Ziemi wynosi:

$$\int_0^1 \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\rangle^{1/2} dt$$

a jej obraz w przestrzeni R^2 ma długość:

$$\int_0^1 \left\langle \phi_* \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right), \phi_* \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right\rangle^{1/2} dt$$

Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Lokalne obrazowanie rozmaitości Riemannowskich jest izometryczne $\phi : M^n \to V^n$ jeśli obraz ϕ_* zachowuje długość wektorów stycznych $\mathbf{X}$ do M, co można wyrazić nastepująco: $< \phi_* \mathbf{X}, \phi_* \mathbf{X} >_V = < \mathbf{X}, \mathbf{X} >_M$. W takim przypadku obraz ϕ_* automatycznie zachowuje także iloczyn skalarny dzięki identyczności:

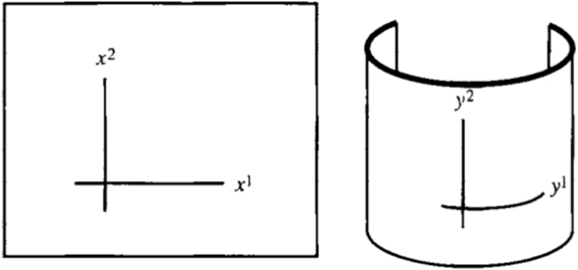
$$< \mathbf{X}, \mathbf{Y} > = \frac{1}{2}\{\| \mathbf{X} + \mathbf{Y} \|^2 - \| \mathbf{X} \|^2 - \| \mathbf{Y} \|^2\}$$

A więc jeśli ϕ jest lokalną symetrią to zachowane są wszystkie długości krzywych, obszary regionów, kąty między krzywymi, inaczej mówiąc mapa jest wtedy wolna od zniekształceń.

Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Na rysunku poniżej przedstawiono przekształcenie na dwóch rozmaitościach zachowujące długość krzywych, ale zmieniające odległość między punktami.



Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Rozważmy przypadek powierzchni M^2 zanurzonej w przesterzni R^3.

Równanie Gaussa dla tego przypadku przyjmuje postać:

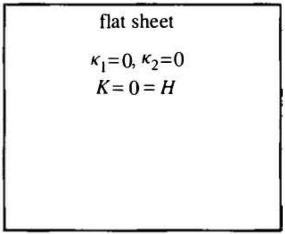
$$R^{12}_{12} := g^{2\alpha} R^{1}_{\alpha 12} = g^{2\alpha}(b^1_1 b_{\alpha 2} - b^1_2 b_{\alpha 1}) = (b^1_1 b^2_2 - b^1_2 b^2_1) = \det b = K.$$

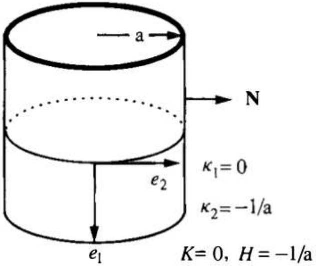
Wynika z tego, że krzywizna Gaussa $K = \kappa_1 \kappa_2 = R^{12}_{12}$ jest niezmiennikiem izometrycznym.

Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Jeśli powierzchnia jest zginana bez rozciągania to pomimo tego, że krzywizny główne się zmieniają ich iloczyn pozostanie niezmienny. Przykład na rysunku poniżej.





Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Jeśli weźmiemy sferę o promieniu a, to jej krzywizna Gaussa wynosi $K = 1/a^2 \neq 0$, stąd wniosek, że każda mapa Ziemi na płaszczyźnie musi wprowadzać zniekształcenia i nie może być izometrią.

Gauss - Theorema Egregium

Konsekwencje równań Gaussa

Theorem Egregium Gaussa mówi, że miara krzywizny powierzchni może byc wyrażona za pomocą tensora R^{12}_{12} i jest całkowicie zdeterminowana przez metrykę.

The End

Dziękuję za uwagę

Theodore Frankel. *The Geometry of Physics.An Introduction.* Cambridge University Press, San Diego, 2012.