Entropia

Maria Habieda, Daria Sobol, Katarzyna Żesławska

Plan prezentacji

- entropia
- twierdzenia Frobeniusa
- twierdzenie Caratheodoriego

Entropia

- Mamy stan x o zadanych parametrach (V,T,P) i chcemy przejść do stanu y o innych parametrach (V,T,P) to takie przejście opisuje entropia.
- Jeśli układ pozostawimy samemu sobie to stan x może ewoluować jedynie do stanów takich samych lub wyższych. Oznacza to, że entropia stanu x jest mniejsza lub równa stanowi y
- $x \leq y \ \leftrightarrow S(x) \leq S(y)$
- Entropia dla stanu początkowego nie może być mniejsza niż dla stanu końcowego.

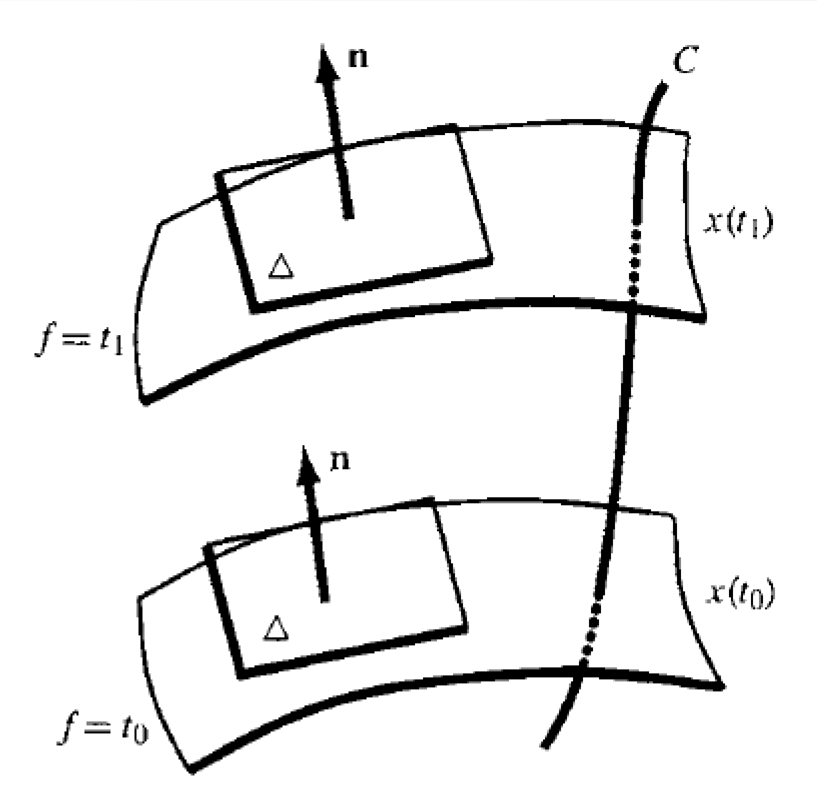
- Jeśli stan x może przejść do stanu y i odwrotnie tzn. że stany x i y są równoważne.
- $x = y$
- Każde dwa stany są porównywalne jeśli nie mamy do czynienia z reakcjami chemicznymi.

- Entropie dwóch układów się sumują.
- $S(x) + S(y) = S(x, y)$
- Jeżeli mamy takie samy układy to:
- $S(x) + S(x) = 2S(x)$
- Układy są adiabatycznie równoważne kiedy entropie są takie same.
- $x \leq y \; i \; y \leq z \; \rightarrow x \leq z$
- Jeżeli dwa stany są połączone termicznie to entropie się wyrównują.

Tw.Frobeniusa

Czy zawsze można znaleźć prostopadłą powierzchnię do rodzin płaszczyzn w R^3?

Niech C będzie sparametryzowaną krzywą poprzeczną do domniemanej rodziny całkowalnych powierzchni. Możemy zdefiniować funkcje f=f(**x**), której to powierzchnia należy do poziomu powierzchni gdzie f=t1, składająca się z całkowalnej powierzchni przebijanej przez poprzeczną krzywą C, przy wartości parametru t=t1.

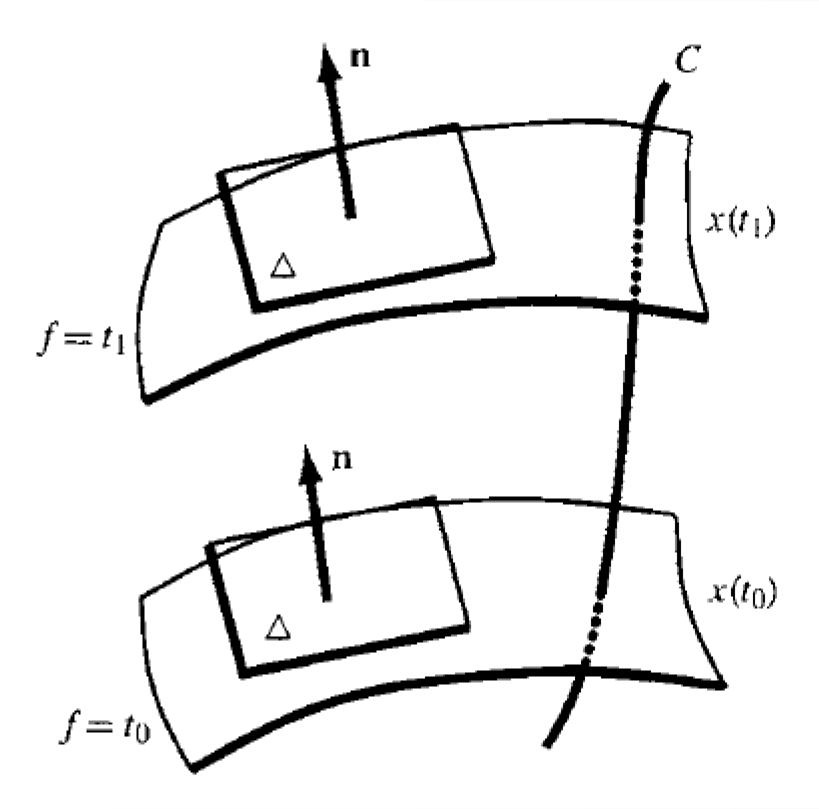


Powierzchnia f dana przez wektor **n** prostopadły do płaszczyzn.

n=λ∇f ; gdzie λ czynnik całkujący, ∇f- gradientowe pole wektorowe funkcji skalarnej .

We współrzędnych kartezjańskich kowektor **v**=$n_i\ dx^i$ musi spełniać warunek **v**=λdf i jeśli *dv=dλ i df=(d log* λ)Λ v, to uzyskujemy warunek całkowalności Eulera.

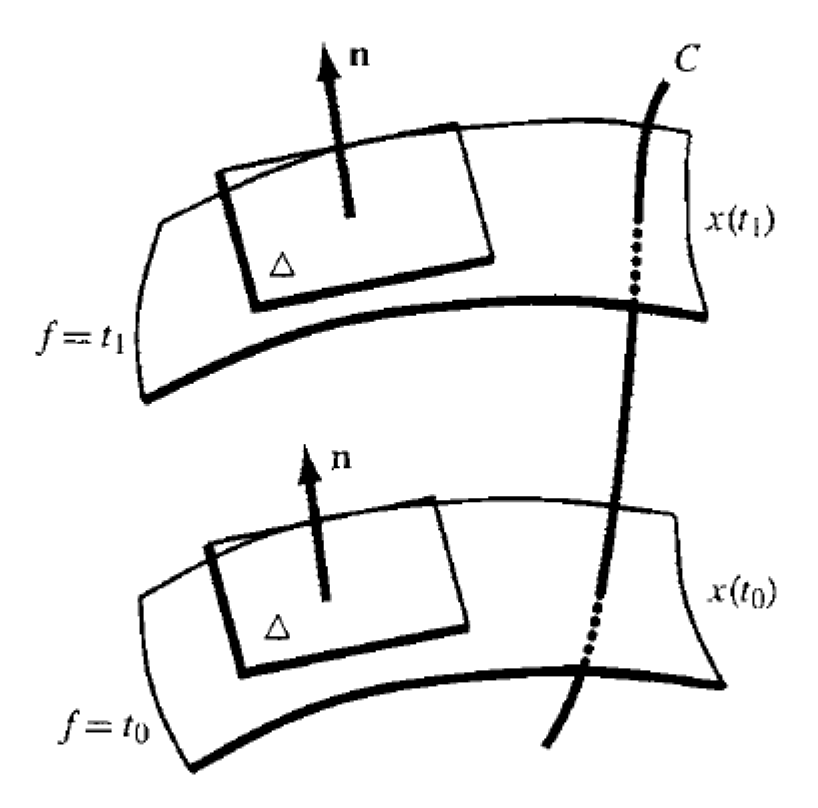
Jeżeli takie całkowalne powierzchnie istnieją to:
v Λ dv =0.



Jeśli *dv=0*, *v=dg,* więc **n** jest prostopadły do powierzchni, g=stała. Rozważanie płaszczyzn prostopadłych względem wektora **n** określonego

$$n=y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

Następnie *v=ydx-xdy+dz,* więc *v Λ dv=-2dx Λ dy Λ dz ≠0,* wektrory **n** nie są prostopadłe do rodziny płaszczyzn.



Klasycznie, we współrzędnych kartezjańskich, płaszczyzny ortogonalne do wektora **n** będą zapisane:

v*=ydx-xdy+dx =0;* czyli składowe wektora przecinają się w jednym punkcie "umowne" 0

Zbiór płaszczyzn na wszystkich punktach **x** w R^3 jest nazywany **dystrybucją** związaną z 1-formą *v.*

- Mamy zbiór płaszczyzn w przestrzeni, te płaszczyzny są znane przez przynajmniej dwa wektory. Dwuwymiarowa płaszczyzna potrzebuje dwóch nierównoległych wektorów. Mamy zbiór płaszczyzn i pytanie kiedy są one całkowalne? Wektory te tworzą w każdym punkcie dystrybucję D. Na pytanie czy można przeprowadzić taką powierzchnię, która jest styczna do płaszczyzn w każdym punkcie odpowiada tw. Frobeniusa.

- Dystrybucje są to pola wektorowe. Zapisana w taki sposób: współrzędna razy pochodna. Pola te mogą działać na siebie- to nazywamy nawiasem Liego . Jeśli mamy wektor **V** i drugi wektor **B**, to możemy wziąć ich nawias
- V=$v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ B=$b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$
- $[V,B]$f=V_0B(f)-B_0V(f)→
- $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\ \mathrm{f}) - b^j \frac{\partial}{\partial x^j}(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\ \mathrm{f}\ )$=[pole wektorowe]$\partial$f/$\partial x^i$
- Otrzymamy pochodną pierwszego rzędu, a drugie się kasują. Dystrybucja rozpinana przez komutujące pola wektorowe ma powierzchnie całkowe.

Kiedy dystrybucja jest całkowalna?

- Dwuwymiarowa dystrybucja rozpięta na polach **V** i **B** nie jest całkowalna, bo posuwając się wzdłuż tych pól jesteśmy w stanie dotrzeć do każdego punktu trójwymiarowej przestrzeni, a zatem nie pozostaniemy wewnątrz żadnej hipotetycznej, dwuwymiarowej powierzchni całkowej.
- **V**$=v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ **B**$=b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
- $[\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}]$f=$V_0$B(f)-$B_0$V(f)→ Ich komutator leży w tej dystrybucji

[**V**,**B**]$=v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\ \mathrm{f}) - b^j \frac{\partial}{\partial x^j}(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\ \mathrm{f}) \in D$

- Dystrybucja D jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest inwolutywna.

- Oznacza to, ze dowolne pole wektorowe leżące w dystrybucji D jest jej polem symetrii.
- **V**,**B** $\in D \Rightarrow [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}] \in D$- dystrybucja jest inwolutywna.

- Tw. Frobeniusa mówi tyle, że jeżeli weźmiemy dwie takie same dystrybucje i zrobimy wszystkie możliwe nawiasy(wszystkie możliwe komutatory)to nie otrzymamy innego wektora, którego można by było złożyć z tych poprzednich –kryterium całkowalności.

- Warunek całkowalności mówi, że dystrybucja jest w inwolucji. Jeżeli dystrybucja jest w inwolucji, czyli jest ona stosowana z nawiasami wówczas występuje rozmaitość całkowalna(istnieje powierzchnia, która jest styczna do każdej z płaszczyzn).
- Wtedy w termodynamice można skonstruować entropię.

- Warunek inwolucji skonstruowano przy pomocy fal różniczkowych. Płaszczyznę można zdefiniować następująco: mamy n-płaszczyzn to potrzeba n-wektorów, które są mniej więcej równoległe do siebie, żeby ją zdefiniować. Można podać warunek definiujący, powiedzieć, że istnieje taka funkcja, która na wektorach się zeruje. Jeżeli mamy przestrzeń n+1-wymiarową- to mamy jeden warunek, który zadaje nam płaszczyzna. Dostajemy n-wymiarową płaszczyznę.

Twierdzenie Caratheodory’ego

- W dowolnie bliskim otoczeniu każdego stanu równowagi układu termodynamicznego znajdują się stany nieosiągalne na drogach adiabatycznych
- Rozważmy następujące doświadczenie. Gaz w naczyniu zaopatrzonym w mieszadełko osłonięty jest adiabatycznie. Mieszadełkiem wykonujemy pracę nad gazem i w ten sposób zmieniamy jego stan. Jeśli objętość naczynia pozostaje stała, to temperatura gazu wzrasta w wyniku mieszania. Zatem w wyniku mieszania możemy osiągnąć dowolny punkt na lub powyżej adiabaty. Punkty leżące poniżej adiabaty są nieosiągalne, gdyż to wymagałoby, aby temperatura układu obniżyła się np. kosztem tego, iż mieszadełko zacznie czerpać pracę z układu.

- Jeżeli mamy dwa punkty leżące koło siebie, w przestrzeni nie ma żadnych dziur, lokalnie jest to przestrzeń Euklidesowa, to możemy traktować entropię jako funkcję ciągłą tzn. możemy ją różniczkować.
- W otoczeniu dowolnego stanu, możemy osiągnąć inny stan poruszając się tylko po wyznaczonym ‚torze'.
- Istnieją stany, które nie mogą być osiągnięte z pewnego stanu.
- Jeśli przestrzeń podzielimy na płaty i układ pozostawimy sam sobie, to nastąpi przejście adiabatyczne wzdłuż wyznaczonych płatów, są one opisane pewnymi parametrami V, T, p

- Jeśli układ mógłby poruszać się dowolnie, to można byłoby konstruować perpetuum mobile, które jedynie czerpałoby energię a nie oddawał.
- Istnieją w przestrzeni pewne podziały i wzdłuż tych płaszczyzn może się poruszać układ jeśli zostanie pozostawiony sam sobie.
- Płaszczyzny te są nazwane więzami holonomiczymi.

Dziękujmy za uwagę!