Algebry Liego i reprezentacje bozonowe oraz fermionowe

Wiktor Chojnacki, Wojciech Noga, Jarosław Czepczor

Grupa Liego

Grupa Liego – grupa, która jest zarazem gładką rozmaitością (obiektem geometrycznym, który lokalnie ma strukturę przestrzeni wektorowej). Przykładem grupy Liego jest grupa obrotów przestrzeni trójwymiarowej. Grupy Liego są często spotykane w analizie matematycznej, fizyce i geometrii.

Algebra Liego

Z każdą grupą Liego G możemy powiązać algebrę Liego nad przestrzenią wektorową styczną do przestrzeni G w jedynce (elemencie neutralnym). Nieformalnie możemy myśleć o elementach algebry Liego jako o elementach grupy, które są „nieskończenie blisko" jedynki.
Takie przekształcenie grupy Liego w algebrę Liego następuje poprzez linearyzację grupy.

Linearyzacja ciągłej grupy Liego

Konstrukcja jest stosunkowo prosta, gdy tylko jawna parametryzacja podstawowej różnorodności i wyrażenie dla prawa kompozycji grupowej są dostępne. W szczególności, w przypadku grup macierzowych mnożenie macierzy, można zbudować algebrę Liego bezpośrednio dla grup macierzy Liego.

Przykład linearyzacji

Zwykłe i wygodne jest parametryzowanie grupy Liego, aby pochodzenie układu współrzędnych było odwzorowywane na tożsamość grupy.

$$(a, b, c) \longrightarrow M(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & \frac{bc+1}{a+1} \end{bmatrix}$$

Linearyzacja

Przykład linearyzacji cd

Grupa jest linearyzowana poprzez badanie sąsiedztwa tożsamości. Dokonuje się tego, pozwalając, aby parametry (a, b, c) stały się nieskończenie małe i rozszerzyły działanie grupy pod względem tych nieskończenie małych do pierwszego rzędu

$$(a, b, c) \longrightarrow (\delta a, \delta b, \delta c) \longrightarrow M(\delta a, \delta b, \delta c) = \begin{bmatrix} 1 + \delta a & \delta b \\ \delta c & \frac{1+\delta b \delta c}{1+\delta a} \end{bmatrix}$$

Linearyzacja przy nieskończenie małych elementach

Przykład linearyzacji cd cd

Podstawowymi wektorami w algebrze Liego są nieskończenie małe współczynniki pierwszego rzędu. W tym przypadku wektorami podstawowymi są macierze 2 x 2.

$$(a, b, c) \longrightarrow (\delta a, \delta b, \delta c) \longrightarrow M(\delta a, \delta b, \delta c) = \begin{bmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & 1-\delta a \end{bmatrix}$$

$$X_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\partial M(a,b,c)}{\partial a}\bigg|_{(a,b,c)=(0,0,0}$$

$$X_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial M(a,b,c)}{\partial b}\bigg|_{(a,b,c)=(0,0,0}$$

$$X_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial M(a,b,c)}{\partial c}\bigg|_{(a,b,c)=(0,0,0}$$

Podstawowe wektory przy linearyzacji

Mapy linearyzacji: EXP

Załóżmy, że X jest operatorem w algebrze Liego. Jeśli ϵ jest małą liczbą rzeczywistą to $I + \epsilon X$ przedstawia element w naszej grupie blisko tożsamości. Wielokrotnie oddalając się od tożsamości możemy zapisać, że:

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k}X)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!} = EXP(X)$$

Przykład EXP

Weźmy taki wektor X, że:

$$X = aX_a + bX_b + cX_c = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

EXP(X) możemy zapisać jako:

$$EXP(X) = EXP(aX_a + bX_b + cX_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}^n$$

Własności algebry Liego

1. Operatory w algebrze Liego tworzą liniową przestrzeń wektorową.

$$X \in \mathfrak{g},\ \ Y \in \mathfrak{g},\ \ \alpha X + \beta Y \in \mathfrak{g}$$

2. Komutator dwóch operatorów znajduje się w algebrze Liego.

$$X \in \mathfrak{g},\ \ Y \in \mathfrak{g},\ \ [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

3. Operatory spełniają tożsamość Jakobiego.

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Słabe struktury algebry Liego

Wektory bazowe, mogą być wyrażone jako liniowa superpozycja tych wektorów:

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$$

Współczynniki $C_{ij}^k X_k$ to stałe struktury algebry Liego. Z antysymetrczności komutatora wynika antysymetryczność w stałej struktury, co oobrazuje nam ten przykład:

$$[X_i, X_j] + [X_j, X_i] = 0$$

Dla stałej struktury:

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0$$

Reprezentacja regularna

Jest to powiązanie macierzy $R(Z)$ z każdym elementem algebry Liego. Regularna reprezentacja n-wymiarowej algebry Liego jest zbiorem macierzy $n \times n$. Ta reprezentacja zawiera te same informacje co stałe struktury.

$$[Z, X_i] = R(Z)_i^j X_j$$

Dla regularnej reprezentacji wektora bazowego, mamy:

$$[Z, X_i] = R(X_i)_j^k X_k = C_{ij}^k X_k$$

Przykład reprezentacji regularnej

Prosta reprezentacja regularna Liego:

$$R(X) = R(aX_a + bX_b + cX_c) = aR(X_a) + bR(X_b) + cR(X_c) = \begin{bmatrix} 0 & -2b & 2c \\ -c & 2a & 0 \\ b & 0 & -2a \end{bmatrix}$$

Struktura algebry Liego

Pierwszym krokiem do problemu klasyfikacji jest odkrycie regularności reprezentacji algebry Liego pod zmianą bazy. Szukamy bazy, która przyniesie reprezentatywną macierz każdego elementu algebry Liego równocześnie do jednej z trzech form:

$\lim_{k\to\infty}\left(I+\frac{1}{k}X\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}=\mathrm{EXP}(X)$	$X=aX_a+bX_b+cX_c=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$	$\mathrm{EXP}(X)=\mathrm{EXP}(aX_a+bX_b+cX_c)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}^n$
Nieregularna redukowalna	Półprostokątna w pełni redukowalna	Prosta nieredukowalna

Przykład

Nie jest możliwe zredukowanie równocześnie regularnej reprezentacji trzech generatorów X_a, X_b, i X_c przy $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ do niejednoznacznej, albo do uproszczonej formy. Jednak, grupa Euklidesowa $E(2)$ ze strukturą:

$$E(2) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & t_1 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ma algebrę Liego z trzema nieskończenie małymi generatorami:

$$L_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i regularną reprezentacją:

$$R(\theta L_z + t_1 P_x + t_2 P_y) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gdzie wiersze i kolumny są kolejno oznaczone jako wektory P_x, P_y oraz L_z. Ta regularna reprezentacja ma diagonalną strukturę blokową nieregularnej algebry Liego.

Inner product – uogólniony iloczyn skalarny zdefiniowany dla przestrzeni rzeczywistych

Ponieważ algebra Liego jest liniową przestrzenią wektorową, możemy nałożyć na nią wszystkie struktury, które sprawiają, że liniowe przestrzenie wektorowe są tak proste i wygodne w użyciu. Obejmują one iloczyny skalarne i odpowiednie wybory wektorów bazowych. Inner product w przestrzeni macierzy jest prosty do skonstruowania. Dobrze znany i użyteczny iloczyn skalarny występuje, gdy A, B są $p \times q$ macierzami czyli iloczynem skalarnym Hilberta–Schmidta.

$$(A, B) = trA^{\dagger} B$$

Ten inner product jest dodatnio określony, gdy:

$$(A, A) = \sum_i \sum_j |A_i^j|^2 \geqslant 0 \quad = 0 \Rightarrow A = 0$$

Inner product

Jeśli zaadoptujemy iloczyn skalarny Hilberta–Schmidta na regularną reprezentacje $\mathfrak{g}$, wtedy:

$$(X_i, X_j) = trR(X_i)^\dagger R(X_j)) = \sum_r \sum_s R(X_i)^{s^*} R(X_j)^s_r = \sum_r \sum_s C^{s^*}_{ir} C^s_{jr}$$

i nazywamy to formą Cartana–Killinga

Metryka Cartana–Killinga

Forma Cartana–Killinga jest szeroko stosowana w teorii klasyfikacji algebr Liego. Miarę Cartana-Killinga można wykorzystać do dalszych udoskonaleń struktury algebry Liego. Przestrzeń wektorowa algebry Liego może być podzielona na trzy podprzestrzenie pod iloczynem skalarnym Cartana-Killinga. Inner product jest określony dodatnio, ujemnie określony i identyczny zero na tych trzech podprzestrzeniach:

$$\mathfrak{g} = V_+ + V_- + V_0$$

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\text{inner product}]{\text{Cartan–Killing}} \begin{cases} V_0 & \text{nilpotent invariant subalgebra} \\ V_- & \text{compact subalebra} \\ V_+ & \text{noncompact operators} \end{cases}$$

Dekompozycja pod wewnętrznym produktem Cartana–Killinga.

Przykład

Cartan-Killing inner product na regularnej reprezentacji $\mathfrak{sl}(2; R)$:

$$(X, X) = trR(x)R(X) = tr \begin{bmatrix} 0 & -2b & 2c \\ -c & 2a & 0 \\ b & 0 & -2a \end{bmatrix}^2 = 8(a^2 + bc)$$

Na tej podstawie możemy łatwo wyprowadzić formę metryki dla Cartan-Killing inner product:

$$8(a^2 + bc) = (a\ b\ c) \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Wygodny wybór wektorów bazowych to taki, które diagonalizują tę macierz metryki: X_a i $X_\pm = X_b \pm X_c$ W tej bazie macierz metryki:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} & \begin{matrix} X_a \\ X_+ \\ X_- \end{matrix} \end{array}$$

Przykład, cd.

W tym odwzorowaniu jasne jest, że operator X_- obejmuje jednowymiarową zwartą podalgebrę w $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ i generatory X_a,X_+ są niezwarte. Powinniśmy tutaj zaznaczyć, że inner product można również obliczyć jeszcze prościej definiując 2×2 macierz reprezentacji $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$

$$(X,X) = tr \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}^2 = 2(a^2 + bc)$$

Daje to inner product, który jest proporcjonalny do inner product uzyskanego z regularnej reprezentacji. Ta obserwacja może być użyta do szybkiego obliczania Cartan-Killing inner products dla wszystkich macierzy algebry Liego

Bibliografia

Lie Groups, Physics, and Geometry: *An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, Robert Gilmore, 2008 Cambridge University Press