

Macierz Toeplitza

Kamil Wiktor
Kaja Miśkowiec

22.06.2018

Plan prezentacji

- 1 Czym jest macierz Toeplitza?
- 2 Przybliżenie budowy macierzy - Gnuplot
- 3 Trochę teorii.
- 4 Program.

0 macierzy

Macierz Toeplitza - Macierz T o wymiarach $n \times n$ jest nazywana macierzą Toeplitza jeśli spełnia warunek:

$$T(k,j) = T(k-1, j-1), \text{ dla } 2 < j, k < n.$$

Inaczej mówiąc, wartości na poszczególnych przekątnych są takie same.

0 macierzy.

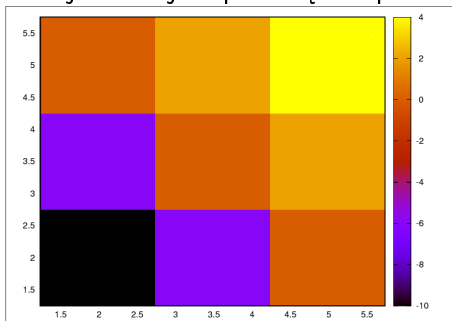
Jest to macierz postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Rysunek: Postać macierzy.

Macierz-Gnuplot

Dobrym zilustrowaniem tego, jak się układają wartości na poszczególnych przekątnych macierzy, jest wykonanie macierzy niejednorodnej za pomocą Gnuplot.



Rysunek: Kolory układają się tak, jak wartości w macierzy.

Teoria

Równanie macierzy w formie $Ax = b$ jest nazywane układem Toeplitza jeżeli A jest macierzą Toeplitza. Jeśli A to macierz Toeplitza $n \times n$ to układ ma tylko $2n-1$ stopnie swobody zamiast n^2 .

Teoria

Macierze Toeplitza powstają w wyniku rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, funkcji sklepanych oraz przy rozwiązywaniu problemów w matematyce, fizyce, statystyce i przetwarzaniu sygnałów.

Teoria

Macierze Toeplitza są też blisko powiązane z szeregami Fouriera, ponieważ operator mnożenia przez wielomian trygonometryczny, skompresowany do przestrzeni o skończonej liczbie wymiarów, może być reprezentowany właśnie przez taką macierz. Podobnie, można przedstawić skręt liniowy jako mnożenie przez macierz Toeplitza. Macierze Toeplitza komutują asymptotycznie. To oznacza, że diagonalizują one na tej samej bazie gdy wymiar wiersza i kolumny zmierza do nieskończoności.

Zastosowanie

Macierz Toeplitza znajduje zastosowanie przy konstruowaniu multimodelowanego systemu, składającego się z 3-ch metod zabezpieczeń jako 'Fusion Biometric System'. Model matematyczny na podstawie macierzy, służy do uporządkowania liczb rzeczywistych na płaszczyźnie x-y przedstawiających np. współrzędne danego brazu.

Co robi?

Przedstawiony program przetwarza dany mu wektor w macierz Toeplitza i odwrotnie, czyli podaną macierz na wektor.

Screen.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
using namespace std;
template <class T>
vector<vector<T> > toeplitz(const vector<T> &t)
{
    int n = (t.size()+1)/2;
    vector<vector<T> > toep(n);
    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        toep[i].resize(n);
        for(int j=0;j<n;j++) toep[i][j] = t[n-1-j+i];
    }
    return toep;
}
template <class T>
vector<T> toep_vector(const vector<vector<T> > &toep)
{
    int i, n = toep.size();
    vector<T> t(2*toep.size()-1);
    for(i=0;i<n;i++) t[i] = toep[0][n-1-i];
    for(i=1;i<n;i++) t[i+n-1] = toep[n-1][n-1-i];
    return t;
}
... ..
```

Rysunek: Rys.3. Program.

Screen.

```
int main(void)
{
    int i, j;
    vector<string> v(7);
    v[0] = "t0"; v[1] = "t1"; v[2] = "t2"; v[3] = "t3";
    v[4] = "t4"; v[5] = "t5"; v[6] = "t6";
    vector<vector<string> > tp = toeplitz(v);
    vector<string> t = toep_vector(tp);
    for(i=0;i<4;i++)
    {
        cout << "[";
        for(j=0;j<4;j++) cout << tp[i][j] << " ";
        cout << "]" << endl;
    }
    cout << endl;
    for(i=0;i<7;i++) cout << "[" << t[i] << "]" << endl;
    return 0;
}
```

Rysunek: Rys.4. Program.

Krótko o...

*Początkowo deklarujemy dwuwymiarowy wektor, stworzony z innych wektorów. Odwołuje się w późniejszej części kodu do niego jak do zwykłej tablicy. Zasobnik vector jest klasą podobną do tablicy.

*nt i, j gdzie i, j ilość wierszy i kolumn.

*vector(string)v(7) jest to deklaracja wektora z siedmioma elementami.

*v[0] = "t0" v[1] = "t1" v[2] = "t2" v[3] = "t3" są kolejne elementy wektora.

*vector(vector)(tring) tp = toeplitz(v) jest to wektor wektorów, wywoływanie funkcji zadeklarowanej na początku, tp – nazwa tablicy zrobionej z wektorów

Efekt końcowy.

```
kamil@kamil-VirtualBox ~/Pulpit/zaliczenie_wiktor_miskowiec $ make run
g++ -Wall -O0 -o main.x main.cpp -lglut -lGL
./main.x
[ t3 t2 t1 t0 ]
[ t4 t3 t2 t1 ]
[ t5 t4 t3 t2 ]
[ t6 t5 t4 t3 ]

[ t0 ]
[ t1 ]
[ t2 ]
[ t3 ]
[ t4 ]
[ t5 ]
[ t6 ]
kamil@kamil-VirtualBox ~/Pulpit/zaliczenie_wiktor_miskowiec $
```

Rysunek: Po skompilowaniu programu poleceniem "make run", otrzymujemy macierz Toeplitza w postaci ogólnej - co było zadaniem programu.

Dziękujemy za poświęcony czas.
:)