Równanie Naviera-Stokesa

Konrad Kapłański i Filip Jurczak

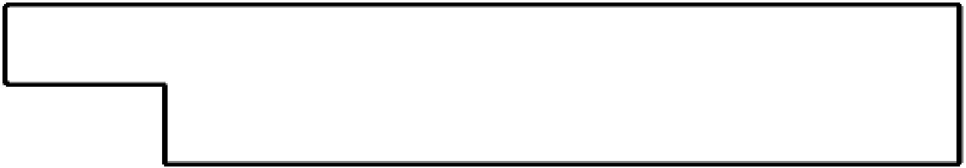
Politechnika Krakowska im.Tadeusza Kościuszki

Wydział Fizyki Matematyki i Informatyki

Fizyka techniczna V semestr

27 stycznia 2018

Problem, który poruszamy, to przepływ nieściśliwej cieczy przez dwuwymiarowy próg. Aby dobrze go zwizualizować, posłużymy się równaniem Naviera-Stokesa



Rysunek: Przekrój, przez który przepływ będziemy wizualizować

Czym są równania Naviera-Stokesa?

- Równania Naviera-Stokesa – zestaw równań opisujących zasadę zachowania pędu dla poruszającego się płynu. Według nich zmiany pędu elementu płynu zależą jedynie od sił masowych, zewnętrznego ciśnienia i wewnętrznych sił lepkości w płynie.

Czym są równania Naviera-Stokesa?

- Równania Naviera-Stokesa – zestaw równań opisujących zasadę zachowania pędu dla poruszającego się płynu. Według nich zmiany pędu elementu płynu zależą jedynie od sił masowych, zewnętrznego ciśnienia i wewnętrznych sił lepkości w płynie.
- Dla płynu idealnego o zerowej lepkości równania mówią, że przyspieszenie jest proporcjonalne do gradientu ciśnienia.

Czym są równania Naviera-Stokesa?

- Równania Naviera-Stokesa – zestaw równań opisujących zasadę zachowania pędu dla poruszającego się płynu. Według nich zmiany pędu elementu płynu zależą jedynie od sił masowych, zewnętrznego ciśnienia i wewnętrznych sił lepkości w płynie.
- Dla płynu idealnego o zerowej lepkości równania mówią, że przyspieszenie jest proporcjonalne do gradientu ciśnienia.
- Rozwiązania równań dla danego problemu fizycznego muszą być znalezione na drodze rachunku różniczkowego i całkowego. W praktyce, jedynie najprostsze przypadki mogą być rozwiązane analitycznie, np. przypadki nieturbulentnego (laminarnego), stacjonarnego przepływu (nie zmieniającego się w czasie). Taki właśnie przypadek rozpatrzymy.

Czym są równania Naviera-Stokesa?

- Równania Naviera-Stokesa – zestaw równań opisujących zasadę zachowania pędu dla poruszającego się płynu. Według nich zmiany pędu elementu płynu zależą jedynie od sił masowych, zewnętrznego ciśnienia i wewnętrznych sił lepkości w płynie.
- Dla płynu idealnego o zerowej lepkości równania mówią, że przyspieszenie jest proporcjonalne do gradientu ciśnienia.
- Rozwiązania równań dla danego problemu fizycznego muszą być znalezione na drodze rachunku różniczkowego i całkowego. W praktyce, jedynie najprostsze przypadki mogą być rozwiązane analitycznie, np. przypadki nieturbulentnego (laminarnego), stacjonarnego przepływu (nie zmieniającego się w czasie). Taki właśnie przypadek rozpatrzymy.
- Liczba Reynoldsa – jedna z liczb podobieństwa stosowanych w mechanice płynów (hydrodynamice, aerodynamice i reologii). Liczba ta pozwala oszacować występujący podczas ruchu płynu stosunek sił bezwładności do sił lepkości. Liczba Reynoldsa stosowana jest jako podstawowe kryterium stateczności ruchu płynów.

Dane:

- Prędkości początkowe: $v_{x0} = 1{,}0\ \frac{m}{s}$, $v_{y0} = 0{,}0\ \frac{m}{s}$

Dane:

- Prędkości początkowe: $v_{x0} = 1{,}0 \ \frac{m}{s}$, $v_{y0} = 0{,}0 \ \frac{m}{s}$
- Na wyjściu znamy jedynie prędkość pionową: $v_{yk} = 0{,}0 \ \frac{m}{s}$

Dane:

- Prędkości początkowe: $v_{x0} = 1{,}0 \ \frac{m}{s}$, $v_{y0} = 0{,}0 \ \frac{m}{s}$
- Na wyjściu znamy jedynie prędkość pionową: $v_{yk} = 0{,}0 \ \frac{m}{s}$
- Przyjmujemy, że przy ściankach nie ma poślizgu, czyli prędkość jest zerowa $\vec{v} = 0$

Dane:

- Prędkości początkowe: $v_{x0} = 1{,}0\ \frac{m}{s}$, $v_{y0} = 0{,}0\ \frac{m}{s}$
- Na wyjściu znamy jedynie prędkość pionową: $v_{yk} = 0{,}0\ \frac{m}{s}$
- Przyjmujemy, że przy ściankach nie ma poślizgu, czyli prędkość jest zerowa $\vec{v} = 0$
- Liczba Reynoldsa dla tego przypadku: $\mathrm{R} \approx 100$

Problem Matematyczny i Warunki brzegowe:

- w obszarze Ω

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (2\mu\bar{\varepsilon}) + \rho\vec{u} \cdot \nabla\vec{u} + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

gdzie μ - lepkość, ε - tensor odkształceń, ρ - gęstość, $\vec{u}$ - prędkość, p - ciśnienie

Problem Matematyczny i Warunki brzegowe:

- w obszarze Ω

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (2\mu\bar{\varepsilon}) + \rho\vec{u} \cdot \nabla\vec{u} + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

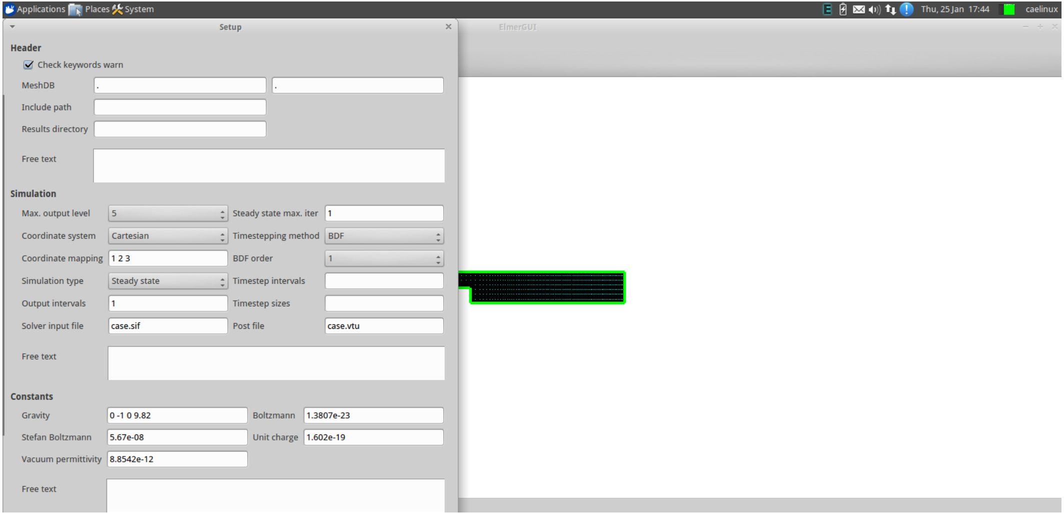
  gdzie μ - lepkość, ε - tensor odkształceń, ρ - gęstość, $\vec{u}$ - prędkość, p - ciśnienie

- warunki brzegowe:

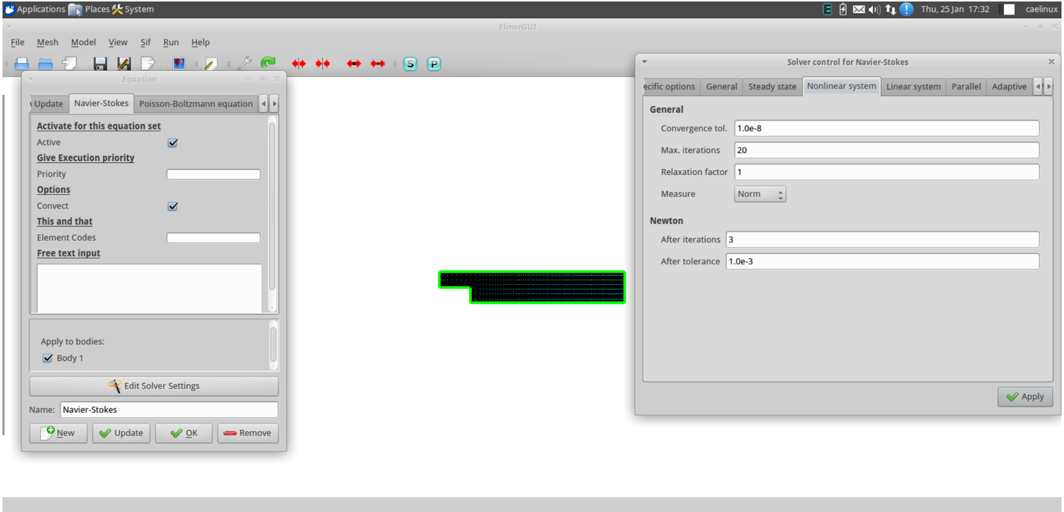
$$\begin{cases} u_x = 1 \text{ na wlocie} \\ u_x = 0 \text{ przy ściankach} \\ u_y = 0 \text{ na wlocie, na wylocie, przy ściankach} \end{cases}$$

Przeniesienie zagadnienia do Elmera

Uruchamiamy program Elmer, następnie wczytujemy siatkę step.grd. W opcji Setup ustawiamy warunki symulacji. Opcja Steady State oznacza, że będziemy pracować w stanie ustalonym, czyli symulacja będzie niezależna od czasu. Wybieramy także kartezjański układ współrzędnych:

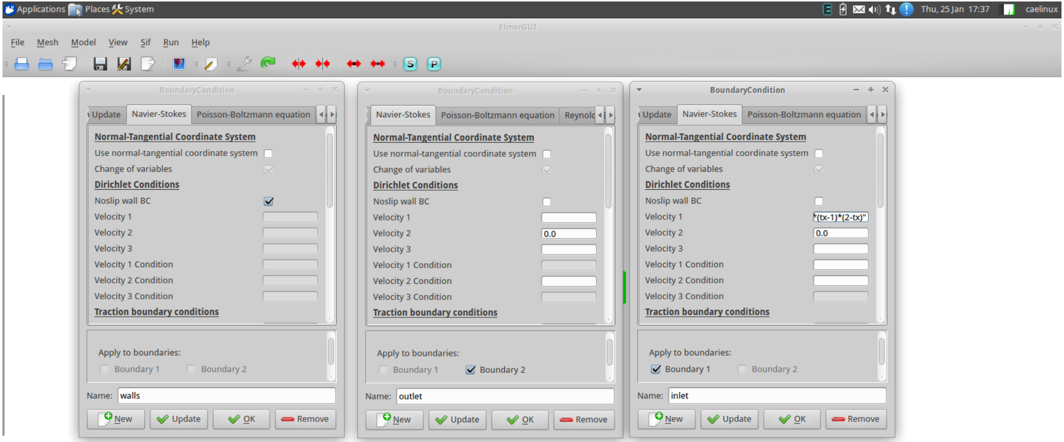


Na tym etapie, deklarujemy równanie Naviera-Stokesa. Przypisujemy równanie do ciała, czyli naszego stopnia. Ograniczamy liczbę iteracji do dwudziestu:

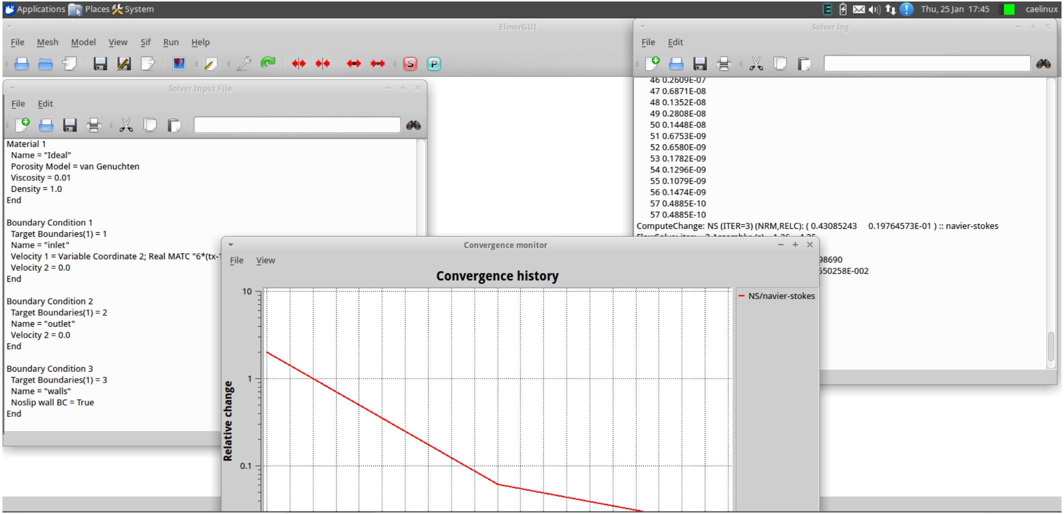


Warunki brzegowe:

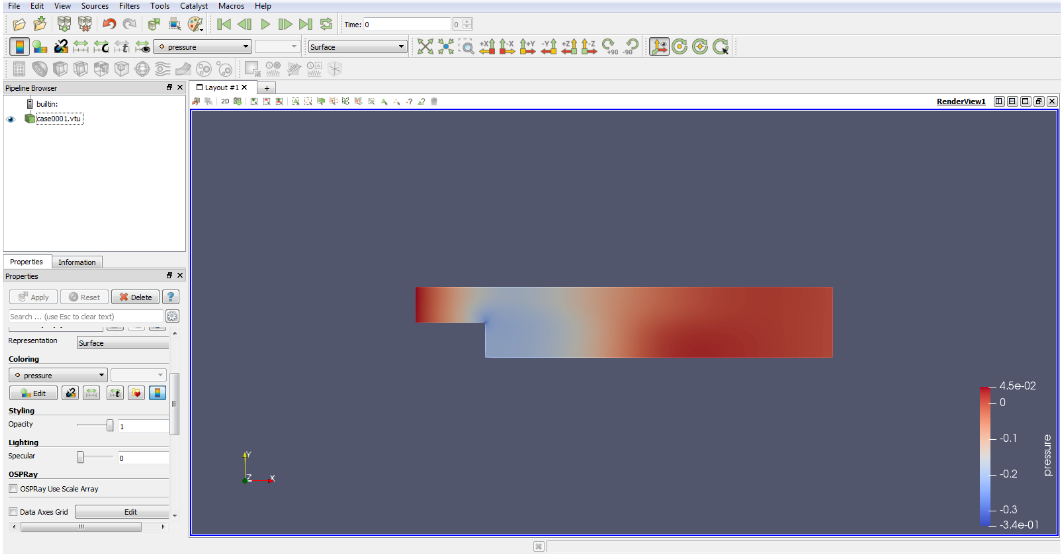
Po zadaniu odpowiednich właściwości, takich jak lepkość i gęstość płynu, przechodzimy do warunków brzegowych. Deklarujemy trzy zakresy: wlot, wylot i ścianki. Pierwsze warunki na zdjęciu, dotyczą ścianek. Nonslip oznacza brak poślizgu. Kolejne warunki dotyczą wylotu. Znamy tu tylko prędkość $u_y = 0$. Na wlocie zakładamy paraboliczny rozkład prędkości poziomej: $u_x = 6(y - 1)(2 - y)$, dla $y \in [1,2]$.



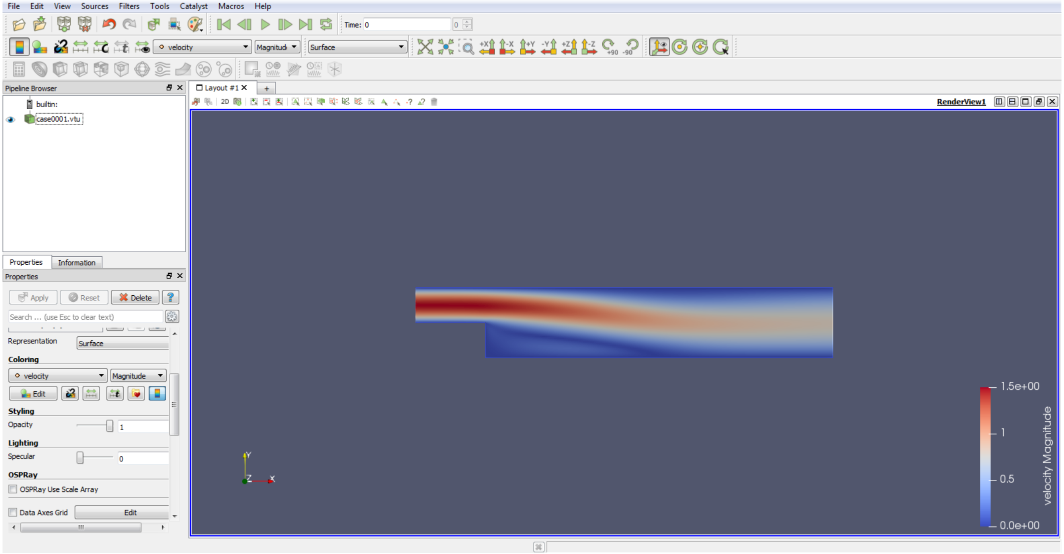
Przypisujemy warunki brzegowe do odpowiednich krawędzi naszej figury. Następnie generujemy Sif, po czym wybieramy opcję Start Solver.



Teraz czas na to, co do nas przemawia najlepiej, czyli wizualizację naszych obliczeń. Dane wczytujemy do programu ParaView, gdzie kolejno wybieramy, co będzie wizualizowane. Na początek rozkład ciśnienia:



Następnie rozkład prędkości:



Omówienie wyników

Naszym zdaniem, wygenerowane wizualizacje w bardzo intuicyjny dla odbiorcy sposób, pokazują rozkład danych wielkości. Jest to niezmiernie wygodne zarówno w celach dydaktycznych (można pokazać studentom np. jak w danych warunkach przepływa ciecz), jak i dla inżynierów (którzy mogą na przykład sprawdzić, na którą część obudowy, działają największe siły, aby móc wprowadzić wzmocnienia i poprawki).

Bibliografia

- Elmer GUI Tutorials by CSC – IT Center for Science
- wikipedia.org