Programowanie półokreślone

Agnieszka Rabiej, Klaudia Tokarz

Wydział Fizyki Matematyki i Informatyki Politechniki Krakowskiej

22.06.2018

Programowanie półokreślone

- jest ważną dziedziną zajmującą się problemami optymalizacji

$$\max \operatorname{tr}(CX)$$

- $\forall$ j $\in$ [m], $tr(AjX) \leq bj$

$$X \geq 0$$

Input: n x n s-rzadkie macierze $C, A_1, ..., A_m$ oraz numery: $b_1, ..., b_m$

Output : X

Szczególny przypadek: Programowanie liniowe (wszystkie macierze diagonalne)

Przykład: Prograowanie liniowe z n=3 i m=3

Zmienne: x_1 x_2 x_3

Ograniczenia: $$\begin{gathered} x_1 + 2x_3 \leq 1 \\ x_2 - x_3 \leq 1 \end{gathered}$$

- Czy rozwiązania kwantowe mogą pomóc?
  Możliwe: Programowanie liniowe jest uogólnieniem równań liniowych, dla których istnieją wykładnicze przyspieszenia kwantowe
- Programowania półokreślone są czymś naturalnym w mechanice kwantowej. Mogą one zostać zredukowane do podanej macierzy hermitowskiej $A_1, ..., A_m$ i rzeczywistych $b_1, ..., b_m$, znajdując gęstość macierzy $\rho s.t.tr(A_i \rho) \leq b_i, \forall i \in [m]$

- Czy rozwiązania kwantowe mogą pomóc?
  Możliwe, że nie: Istnieje taka dolna granica kwantowa, że: $\Omega(n^{1/2} + m^{1/2})$, a więc żadna ogólna funkcja wykładnicza nie przyspiesza.
  Co więcej, nawet wielomianowe przyśpieszenia wydają się nieuchwytne.

Stany Gibbsa

- Termiczny stan Hamiltonianu H w temperaturze T ma postać:
  $\rho_T = e^{-H/T}/tr(e^{-H/T})$
  Kluczowym jest, aby zrozumieć właściwości równowagowych układów w skończonej temperaturze.

Programowanie półokreślone i Stany Gibbsa

- Niech ρ będzie stanem kwantowym $tr(\rho M_i) = c_i$
  Wtedy istanieje stan Gibbsa w formie $exp(\sum \lambda_i M_i)/tr(...)$
  Z liczbami rzeczywistymi λ_i z takimi samymi wartościami oczekiwanymi.
  Co więcej stan Gibbsa jest stanem maksymalnej entropii z poprawnymi wartościami oczekiwanymi.

Programowanie półokreślone i Stany Gibbsa

- Programowanie półokreślone: $\forall$ j $\in$ [m], $\begin{array}{c} maxtr(CX) \\ tr(AjX) \leq bj \\ X \geq 0 \end{array}$

  Zgodnie z zasadą Jaynes istnieje rozwiązanie formy:
  $X = exp(\sum \lambda_j A_j + \lambda_0 C)$
  Dlaczego? Można zastosować to w $X_opt/tr(X_opt)$, aby uzyskać stan Gibbsa z takimi samymi wartościami oczekiwanymi dla A_j, C
  Problem sprowadza sie do znalezienia właściwego λ_j

Dolne ograniczenia programowania półokreślnego

Optymalne rozwiązania mają złożoność czasową:

- pierwszy (nxn wymiarowa macierz M): $\Omega(n^2)$ dla maksymalizacji
- drugi (m wymiarowy wektor y): $\Omega(m)$ dla minimalizacji

  Aby obliczyć optymalną wartość, złożoność obliczeniowa wynosi:
- Klasycznie: $\Omega(n + m)$ (dla stałych r, R, s, δ)
- Kwantowo: $\Omega(n^{1/2} + m^{1/2})$ (dla stałych r, R, s, δ)