Algorytm Deutscha

Fizyka Techniczna

Kamila Lisowska
Tomasz Jaglarz
Piotr Andrzejczuk

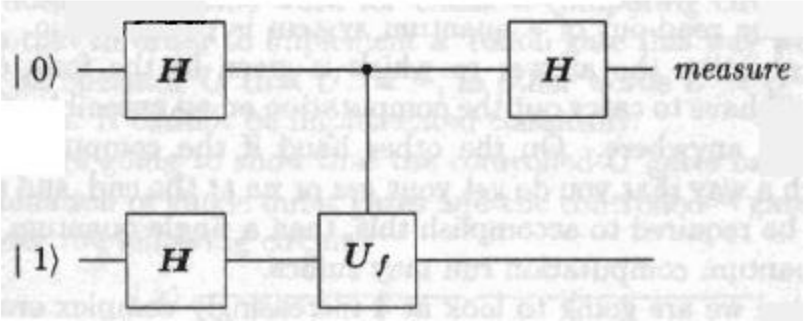
- Algorytm Deutscha jest przykładem realizacji **wyroczni kwantowej**.
- Wyrocznia jest urządzeniem, które odpowiada na stawiane pytania jedynie **”tak”** lub **”nie”**.
- Pytania mogą być bardzo skomplikowane, procedura przygotowywania odpowiedzi może być bardzo złożona i może wymagać wielu obliczeń. Jednak wyrocznia podaje wyłącznie jedna z odpowiedzi ”tak” lub ”nie”.
- Pomimo prostoty tych odpowiedzi, wyrocznia może być użyteczna przy rozwiazywaniu bardzo złożonego problemu, jeżeli tylko potrafimy dokonać dekompozycji tego problemu na problemy proste, tak sformułowane, że wystarczy dla nich jedna z odpowiedzi ”tak” lub ”nie”.

Powiedzmy, ze mamy określoną funkcje f, która odwzorowuje zbiór liczb $\{0, 1\}$ na zbiór $\{0, 1\}$, przy czym funkcja ta jest albo

- **stała**, jeżeli $f(0) = f(1)$, albo
- **zrównoważona**, jeżeli $f(0) \neq f(1)$.

- Wyrocznia Deutscha znajduje odpowiedź na pytanie, czy funkcja $f(x)$ jest stała czy zrównoważona.
- Komputer klasyczny daje odpowiedz na to pytanie po obliczeniu wartości funkcji $f(0)$ i $f(1)$, czyli po dwukrotnym obliczeniu funkcji.
- Kwantowy algorytm Deutscha odpowiada na to pytanie po jednokrotnym obliczeniu funkcji $f(x)$.

Implementacja algorytmu Deutscha odbywa się za pomocą obwodu kwantowego o schemacie pokazanym poniżej:



Stanami wejściowymi są:

- $|0\rangle$ w pierwszym rejestrze (górna linia),
- $|1\rangle$ w dolnym rejestrze (dolna linia).

H jest bramką Hadamarda, a U_f jest sterowaną bramką, która służy do obliczania wartości funkcji *f*.

W jawnej postaci: $U_f|x\rangle|y\rangle = |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$

Działanie bramki Hadamarda na stany bazy obliczeniowej, czyli stany wejściowe w algorytmie Deutscha:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Algorytm Deutscha wykonywany jest w trzech krokach.

KROK 1

Pierwsza para bramek Hadamarda przekształca kubity wejściowe $|0\rangle$ i $|1\rangle$ w stan

$$\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \ ,$$

gdzie symbol $\otimes$ oznacza iloczyn tensorowy wektorów stanu rejestru pierwszego (górnego) i drugiego (dolnego).

KROK 2

Stan otrzymany w kroku pierwszym poddany jest działaniu bramki U_f :

$$U_f|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = |x\rangle \otimes (|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle)$$

Jeżeli *f*(*x*) = 0, to wyrażenie w nawiasie po prawej stronie równania przyjmuje postać:

$$|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = |0\rangle - |1\rangle = (-1)^0(|0\rangle - |1\rangle) = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Jeżeli *f*(*x*) = 1, to wyrażenie to przyjmuje postać:

$$|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = |0\rangle - |1\rangle = (-1)^1(|0\rangle - |1\rangle) = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$$

KROK 2

Z powyższych wzorów wynika, ze ten sam wzór jest słuszny dla wszystkich wartości *f*(*x*), czyli:

$$U_f|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = (-1)^{f(x)}|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

Stosując powyższy wzór do stanu otrzymanego w wyniku kroku pierwszego otrzymujemy:

$$U_f \frac{1}{2}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle) = \frac{1}{2}\left[(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right]\otimes(|0\rangle-|1\rangle)$$

KROK 3

Działamy bramka Hadamarda na stan pierwszego rejestru w poprzednim równaniu, czyli na wektor: $(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle$

I otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2} \quad \left[(-1)^{f(0)} H|0\rangle + (-1)^{f(1)} H|1\rangle\right] \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
= \; & \frac{1}{2}\left[(-1)^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle) + (-1)^{f(1)}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] \\
& \otimes(|0\rangle - |1\rangle) \\
= \; & \frac{1}{2}\left\{|0\rangle\left[(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}\right] + |1\rangle\left[(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}\right]\right\} \\
& \otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\ .
\end{aligned}$$

Przeanalizujemy teraz wynik zawarty w dwóch ostatnich wierszach.

KROK 3

Jeżeli funkcja *f*(*x*) **jest stała**, to zachodzi:

$$(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} = 0$$

W tym przypadku stan końcowy górnego rejestru (stan górnej linii schematu) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2}\left\{|0\rangle\left[(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}\right]\right\} = \pm|0\rangle$$

KROK 3

Jeżeli funkcja *f*(*x*) **jest zrównoważona**, to zachodzi:

$$(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} = 0$$

W tym przypadku stan końcowy górnego rejestru (stan górnej linii schematu) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2}\left\{|1\rangle\left[(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}\right]\right\} = \pm|1\rangle$$

WNIOSKI

W celu określenia, czy funkcja $f(x)$ jest stała czy zrównoważona, wystarczy – po wykonaniu kroków (1-3) – dokonać pomiaru stanu wyjściowego górnego rejestru (stanu końcowego górnej linii). Jeżeli stanem końcowym jest $|0\rangle$, to funkcja $f(x)$ jest stała, a jeżeli stanem końcowym jest $|1\rangle$, to funkcja $f(x)$ jest zrównoważona.

A zatem algorytm Deutscha odpowiada na pytanie, czy funkcja $f(x)$ jest stała czy zrównoważona, obliczając wartość funkcji $f(x)$ tylko jeden raz (operacja U_f została zastosowana tylko raz).

ZASTOSOWANIA

Metody różnicowe fizyki obliczeniowej wymagają dokonania dyskretyzacji zmiennych i funkcji, czyli tabelaryzacji wartości funkcji. W wyniku dyskretyzacji otrzymujemy funkcje przedziałami stała. W tym celu możemy zastosować algorytm Deutscha.

A zatem algorytm ten może być stosowany do odpowiedniego przyspieszenia implementacji metod różnicowych, używanych np. w różniczkowaniu numerycznym lub numerycznym całkowaniu (za pomocą metody prostokątów).