Twierdzenie Frobeniusa

Klaudia Tokarz, Agnieszka Rabiej

Wydział Fizyki Matematyki i Informatyki

05.02.2018r.

Wstęp

Przypuśćmy, że dystrybucja D jest rozpinana przez rodzinę pól wzajenie komutujących: $\left[\overset{(a)}{X}, \overset{(b)}{X}\right] = 0$
Okazuje się, że wtedy przesuwając się wzdłóż tych pól od wybranego punktu x_o pozostaniemy w pewnej k-wymiarowej powierzchni (podrozmaitości) $N_{x_0} \subset M$, zanurzonej w M, a więc wcale nie dotrzemy do dowolnego punktu w przestrzeni. Aby się o tym przekonać rozważmy odwzorowanie:

$$R^k \supset O \ni (t^1, ..., t^k) \to G^{\overset{(k)}{X}}_{t^k} \circ ... \circ G^{\overset{(2)}{X}}_{t^2} \circ G^{\overset{(1)}{X}}_{t^1}(x_0) \in M$$

.
Pola te komutują, więc kolejność składania transformacji w powyższym wzorze nie ma znaczenia.

Twierdzenie Frobeniusa

*Lemat*1 : Zachodzi tożsamość:

$$\frac{\partial}{\partial t^a} = \overset{(a)}{X} .$$

Dowód: Oznaczmy:

$$G^{\overset{(a-1)}{X}}_{t^{a-1}} \circ \ldots \circ G^{\overset{(2)}{X}}_{t^2} \circ G^{\overset{(1)}{X}}_{t^1}(x_0) = y$$

$$G^{\overset{(k)}{X}}_{t^k} \circ \ldots \circ G^{\overset{(2)}{X}}_{t^2} \circ G^{\overset{(1)}{X}}_{t^1}(x_0) = G^{\overset{(k)}{X}}_{t^k} \circ \ldots \circ G^{\overset{(a)}{X}}_{t^a}(y) = z$$

Twierdzenie Frobeniusa

Mamy zatem:

$$\frac{\partial}{\partial t^a} G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ \ldots \circ G_{t^2}^{\overset{(2)}{X}} \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial t^a} G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ \ldots \circ G_{t^a}^{\overset{(a)}{X}}(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^a} G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ \ldots \circ G_{t^2}^{\overset{(2)}{X}} \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_0) = (G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}})_* \circ \ldots \circ (G_{t^{a+1}}^{\overset{(a+1)}{X}})_* \overset{(a)}{X}(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^a} G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ \ldots \circ G_{t^2}^{\overset{(2)}{X}} \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_0) = \overset{(a)}{X}(z)$$

Zauważmy, że transport pola $\overset{(a)}{X}$ wzdłóż pozostałych komutujących z nim pól nie zmienia tego pola.
Wniosek: W każdym punkcie rozmaitości N_{x_0} jej przestrzeń styczna jest równa przestrzeni D:

$$T_z N_{x_0} = D_z \subset T_z M$$

Twierdzenie Frobeniusa

Definicja: Podrozmaitość $N \subset M$ nazywamy rozmaitościa całkową dystrybucji D jeśli w każdym jej punkcie zachodzi

$$D_z = T_z N$$

.

Pokazaliśmy,że dystrybucja rozpinana przez komutujące pola wektorowe ma powierzchnie całkowe. Jest ich wiele, bowiem punkt wyjściowy x_0 można wybrać dowolnie. Jeśli jednak zastąpić go innym punktem leżącym w tej samej powierzchni M, to otrzymamy inną parametryzację tej samej podrozmaitości całkowej. Aby ponumerować różne powierzchnie całkowe wystarczy wziąć dowolną (n-k)-wymiarową powierzchnię $K \subset M$, transwersalną względem dystrybucji D i rozpoczynać naszą konstrukcję zawsze z punktu leżącego na tej powierzchni $x_0 \in K$.

Twierdzenie Frobeniusa

Transweralność powierzchni oznacza, że jej przestrzeń styczna jest rozłączna z dystrybucją D, tzn.: $D_x \cap T_x K = 0$. Jeśli teraz $(\tau^r), r = 1, ..., n-k$; to (τ^r, t^a) stanowią układ współrzędnych w całym M, według wzoru:

$$R^n \supset U \ni (\tau^1, ..., \tau^{n-k}, t^1, ..., t^k) \to G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ ... \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_o(\tau^r)) \in M.$$

Twierdzenie Frobeniusa

Wniosek: Jeśli dystrybucja D jest rozpięta przez komutujące pola wektorowe, to w otoczeniu każdego punktu $x \in M$ można wprowadzić współrzędne (τ^r, t^a) takie, że ich pierwsza grupa numeruje różne powierzchnie całkowe dystrybucji, zaś ona sama jest ropięta na różniczkowaniach względem współrzędnych z drugiej grupy:

$$D_x = span\{\frac{\partial}{\partial t^1}, ..., \frac{\partial}{\partial t^k}\} \subset T_x M.$$

Twierdzenie Frobeniusa

Pokazaliśmy zatem jak "całkować" dystrybucję D, jeśli jest ona rozpięta przez komutujące pola wektorowe. Jednak w zastosowaniach czesto występuje sytuacja, gdy badana struktura fizyczna wyróżnia pewną dystrybucję rozpietą przez układ pól wektorowych, jednak wcale nie komutujących. Zachodzi pytanie, czy dystrybucja jest, czy nie jest całkowalna? Dwuwymiarowa dystrybucja rozpięta na polach X i Y na pewno nie jest całkowalna, bo posuwajac się wzdłóż tych pól jesteśmy w stanie dotrzeć do każdego punktu trójwymiarowej przestrzeni, a zatem nie pozostaniemy wewnatrz żadnej hipotetycznej, dwuwymiarowej powierzchni całkowej.

Twierdzenie Frobeniusa

Zauważmy, że dla dystrybucji całkowalnej tworza pola $\frac{\partial}{\partial t^a}$. A zatem dowolne dwa pola wektorowe X i Y leżące w takiej dystrybucji są kombinacjami

$$X = X^a \frac{\partial}{\partial t^a}; Y = Y^a \frac{\partial}{\partial t^a},$$

Zatem ich komutator też leży w tej dystrybucji,

$$[X, Y] = (X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a) \frac{\partial}{\partial t^a} \in D$$

Twierdzenie Frobeniusa

Oznacza to, że dowolne pole wektorowe leżące w dystrybucji D jest jej polem symetrii. Wynika stąd warunek konieczny na całkowalność:

$$X, Y \in D \Longrightarrow [X, Y] \in D$$

Dystrybucja spełniająca ten warunek, czyli "domknięta ze względu na branie komutatorów" nazywa się inwolutywną. Okazuje się, że jest to również warunek konieczny na całkowalność.

Twierdzenie Frobeniusa

Twierdzenie Frobeniusa: Dystrybucja D jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest inwolutywna.
Dowód Twierdzenia Frobeniusa: Pakażemy, że w otoczeniu każdego punktu $x \in M$ da się skonstruować układ współrzędnych (τ^r, t^i) taki, że (τ^r) numerują różne powierzchnie całkowe dystrybucji, zaś ona sama jest rozpięta na różniczkowaniach względem współrzędnych z drugiej grupy. W tym celu postąpimy identycznie jak w przypadku komutującym: wybierzemy dowolną (n-k)-wymiarowa powierzchnię K transwersalną względem dystrybucji D a na niej jakiś układ współrzędnych (τ^r).

Twierdzenie Frobeniusa

Następnie zdefinujemy żądany układ współrzędnych (τ^r, t^i) wzorem:

$$R^n \supset U \ni (\tau^1, ..., \tau^{n-k}, t^1, ..., t^k) \to G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ ... \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_o(\tau^r)) \in M,$$

gdzie jako $\{\overset{(1)}{X}, ..., \overset{(k)}{X}\}$ wybierzemy dowolny układ pól wektorowych rozpinających dystrybucję D. Pola te zapewne nie komutuja. Zatem, w odróżnieniu od sytuacji komutującej, wynik zależy od kolejności aplikowania grup $G_{t^i}^{\overset{(i)}{X}}$ do punktu $x_o(\tau^r) \in K$. Decydujemy się na kolejność jak we wzorze powyżej. Ponieważ pola sa liniowo niezależne, wzór ten definiuje lokalny układ współrzędnych w otoczeniu punktu $x \in M$.

Twierdzenie Frobeniusa

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że powierzchnie $N_{(\tau^r)}$ odpowiadające ustalonej warości parametrów (τ^r) sa powierzchniami całkowymi dystrybucji D. Ale przestrzeń styczna do takiej powierzchni jest rozpięta przez wektory $\frac{\partial}{\partial t^a}$. Stosując oznaczenia z dowodu Lematu 1 widzimy, że zachodzi wzór:

$$\frac{\partial}{\partial t^a} G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ \dots \circ G_{t^2}^{\overset{(2)}{X}} \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_0) = (G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}})_* \circ \dots \circ (G_{t^{a+1}}^{\overset{(a+1)}{X}})_* \overset{(a)}{X}(y),$$

choć nastepny wzór:

$$\frac{\partial}{\partial t^a} G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}} \circ \dots \circ G_{t^2}^{\overset{(2)}{X}} \circ G_{t^1}^{\overset{(1)}{X}}(x_0) = \overset{(a)}{X}(z)$$

nie jest już prawdziwy, bowiem pola nie komutuja.

Twierdzenie Frobeniusa

Tym niemniej zachodzi równość:

$$\frac{\partial}{\partial t^a} = (G_{t^k}^{\overset{(k)}{X}})_* \circ \ldots \circ (G_{t^{a+1}}^{\overset{(a+1)}{X}})_* \overset{(a)}{X} (y) \in D_z$$

na mocy twierdzenia:
Twierdzenie: Pole Y jest polem symetrii dystrybucji D, tzn. zachodzi wzór:

$$(G_t^Y)_* D \subset D,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek $X \in D \Longrightarrow [Y, X] \in D$, czyli gdy jego nawias Lie'go z dowolnym polem z D też jest polem z D.

Twierdzenie Frobeniusa

A zatem $\frac{\partial}{\partial t^a} \in D$, czyli

$$T_z N_{(\tau^r)} = span\{\frac{\partial}{\partial t^1}, ..., \frac{\partial}{\partial t^k}\} = D_z,$$

co kończy dowód. $\square$