SPINORY

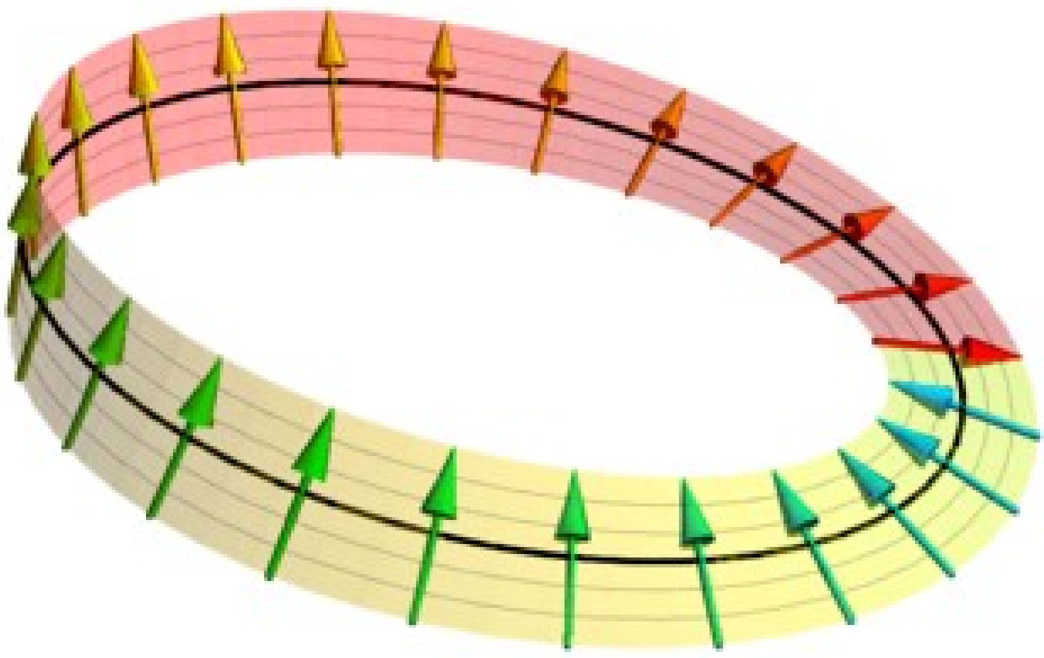
Maciej Dudek
Michał Kaczmarczyk

Wprowadzenie

Intuicyjnie możemy powiedzieć że spinory to swojego rodzaju wektor który posiada długość, kierunek oraz właśnie pewną dodatkową właściwość. Wyobraźmy sobie że nasz spinor jako wektor ma na jednym końcu przyczepioną elastyczną gumową taśmę. Drugi koniec przytwierdzamy do ściany. Dzięki temu że jest to spinor poza długością i kierunkiem będziemy wiedzieć czy taśma ta została skręcona parzyście czy nieparzyście razy.

Wprowadzenie

W geometrii i fizyce spinory są elementami złożonej przestrzeni wektorowej która może być związana z przestrzenią euklidesową. Gdy ta przestrzeń poddawana jest niewielkim rotacjom spinory przekształcają się liniowo. W przeciwieństwie do wektorów i tensorów gdy dokonamy pełnego obrotu przestrzeni to spinor przekształca się w swój ujemny odpowiednik. Spinory są niezbędne do opisania wewnętrznego momentu pędu (czyli spinu).

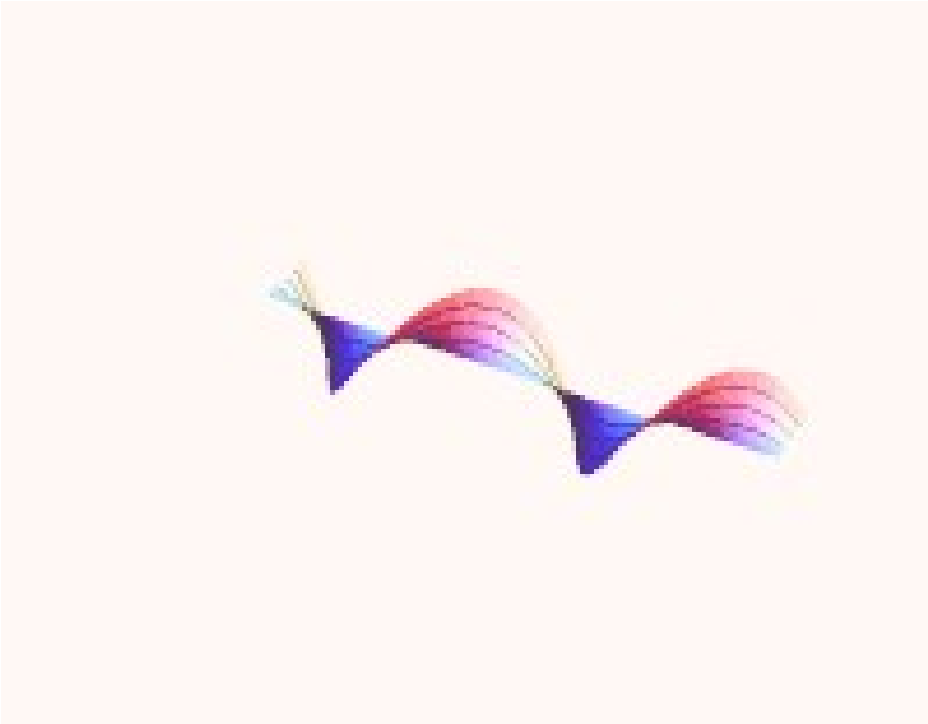


Wprowadzenie

Spinory charakteryzują się specyficznym sposobem w jakim zachowują się pod wpływem rotacji. Istnieją dwie wyróżniające się topologiczne klasy ścieżek przez obroty które skutkują tym samym ogólnym obrotem.

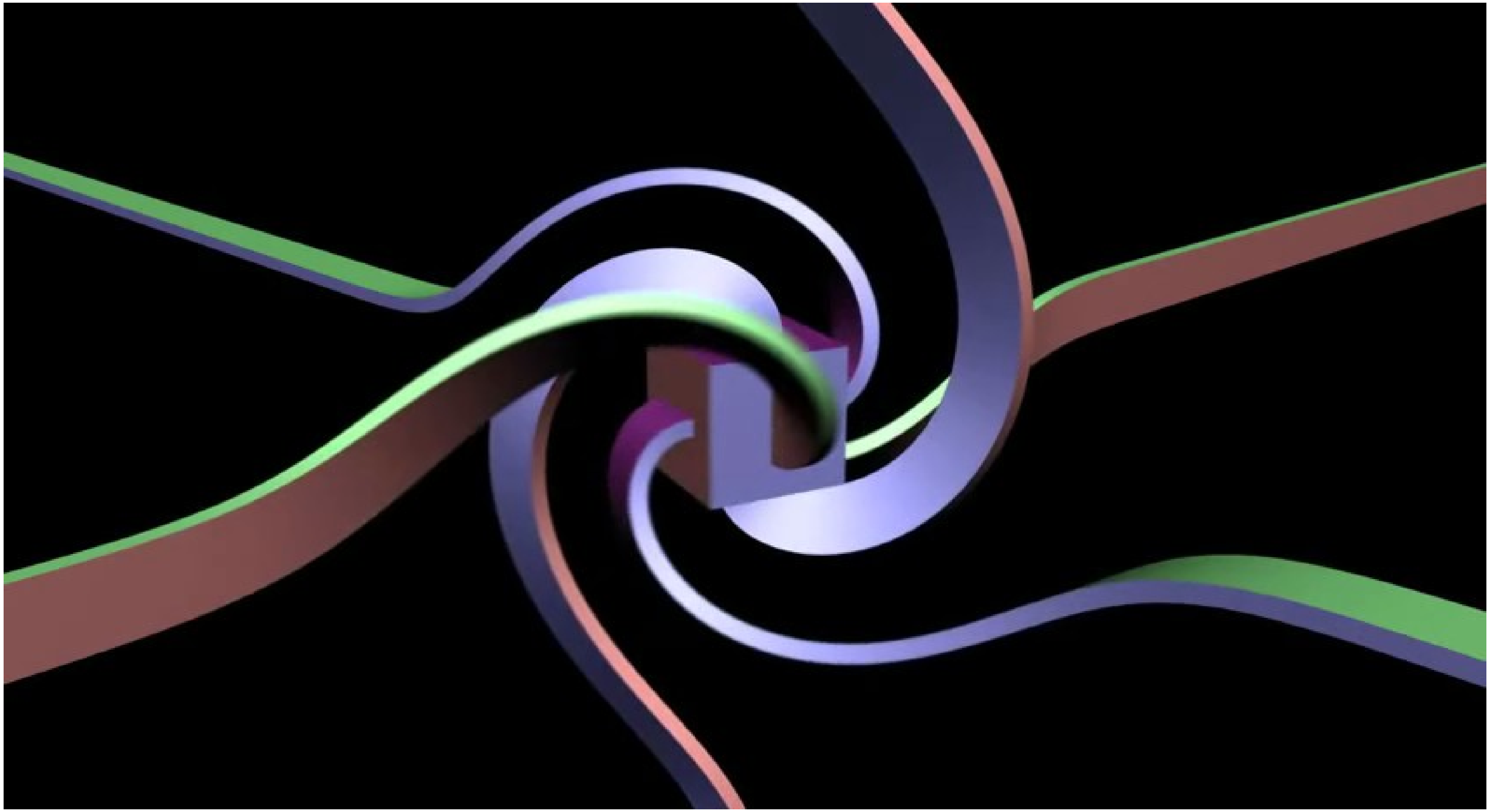
Jak widzimy na animacji powyżej używając obrotu o 360 ° nie jesteśmy w stanie odkształcić wstążki

Wprowadzenie



Aby tego dokonać potrzebujemy użyć innej klasy. W tym przypadku obracamy wstążkę o 720°. Jak widać odkształcenie przebiega bez większych problemów co nie było możliwe w poprzednim przypadku.

Wprowadzenie



Innym przykładem jest obiekt przyczepiony do pasów który obraca się bez zaplątania się. Jeśli przyjrzymy się obracającemu się obiektowi możemy zauważyć że dla obrotu o 360° spirala zostanie odwrócona od początkowej konfiguracji a dla obrotu 720° powraca do pierwotnego stanu

Wprowadzenie

Podział

Spinory możemy rozumieć też na dwa sposoby. Pierwszym jest teoria reprezentacyjna z której punktu widzenia wiemy że istnieją wcześniej pewna reprezentacja algebry Liego grupy ortogonalnej która nie może być utworzona przez zwykłe konstrukcje tensorowe. Gdzie właśnie ta reprezentacja jest oznaczana jako reprezentacja spinów i jej elementów (spinorów). Wtedy spinor musi należeć do reprezentacji podwójnej nakrycia dla grupy rotacji SO(n,R). Nakrycia te są grupami Liego zwane grupami spinowymi Spin(n). Właśnie w tej grupie manifestują się po raz pierwszy zastosowania i właściwości spinów.

Drugim punktem widzenia spinorów jest geometryczny w którym możemy jednoznacznie skonstruować spinory a następnie zbadać jak zachowują się one pod wpływem pewnych grup Liego. Podejście to ma jedną duża zaletę a mianowicie, zapewnia konkretny i elementarny opis tego czym jest spinor. Niestety taki opis staję się nieporęczny gdy potrzebne są skomplonowane właściwości spinorów.

Grupy Spinu

Spinory tworzą przestrzeń wektorową zwykle nad liczbami zespolonymi wyposażonymi w liniową reprezentację grup spinów która nie uwzględnia reprezentacji grupy obrotów.

Grupa spinów to tzw grupa rotacji rejestrująca klasę homotopii(ciągle przejście między dwoma przekształceniami ciągłymi przestrzeni topologicznych). Spinory odkrywają tu role zakodowania podstawowych informacji o topologii grup obrotów, ponieważ grupa ta nie jest zwyczajnie połączona lecz jest podwójnie nakryta. Tak więc przy każdym obrocie są dwa elementy grupy spinów które ją reprezentują. Niestety wektory geometryczne i inne tensory nie mogą wykryć różnicy między tymi dwoma elementami lecz wytwarzają przeciwne znaki gdy wpływają na dowolny spinor pod reprezentacją.

$$\begin{tikzcd}
\{\pm 1\} \arrow[d] \arrow[dr, hook] & \\
\mathrm{Spin}(Q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}(\Delta) \\
\mathrm{SO}(Q) &
\end{tikzcd}$$

Grupy Spinu

Myśląc o elementach grupy spinów jako klasach homotopii jednoparametrowych rodzin rotacji, każdy obrót jest reprezentowany przez dwie odrębne klasy homotopii ścieżek do tożsamości. Jeśli jednoparametrowa rodzina rotacji jest wizualizowana jako wstążka w przestrzeni, przy czym parametrem długości łuku jest ta wstążka (jej styczna, normalna, klatka binarna faktycznie daje rotację), wtedy te dwie odrębne klasy homotopii są wizualizowane w dwa stany układanki podstępu paska (tak jak było pokazane na poprzednich slajdach). Przestrzeń spinorów jest pomocniczą przestrzenią wektorową, którą można skonstruować wyraźnie we współrzędnych, ale ostatecznie istnieje tylko do izomorfizmu, ponieważ nie ma "naturalnej" konstrukcji, która nie opiera się na arbitralnych wyborach, takich jak układy współrzędnych. Pojęcie spinorów można powiązać, jako taki pomocniczy obiekt matematyczny, z dowolną przestrzenią wektorową wyposażoną w kwadratową formę, taką jak przestrzeń euklidesowa z jej standardowym produktem punktowym, lub przestrzeń Minkowskiego z jej metryką Lorentza. W tym ostatnim przypadku "rotacje" obejmują podwyżki Lorentza, ale poza tym teoria jest zasadniczo podobna.

Spinory w fizyce

Najbardziej typowym typem spinora jest spinor Diraca, który jest elementem podstawowej reprezentacji $C\ell_{p+q}(C)$ dla złożoności algebry Clifforda $C\ell_{p,q}(R)$ do której należy grupa spinowa Spin(p,Q) która może być obsadzona. Na przestrzeni 2k- lub 2k+ jednowymiarowej spinor Diraca może być reprezentowany jako wektor o liczbach zespolonych 2k. W parzystych wymiarach reprezentacja ta jest redukowalna gdy jest reprezentowana przez Spin(p,q) i rozkładamy ą na prawoskrętną i praworęczną reprezentację spinora Weyl'a. Ponadto występuję też mniejsza rzeczywista reprezentacja spinora Majorany która jeśli występuję w wymiarze równomiernym, reprezentacja ta ulega rozpadowi na dwie reprezentacje spinora Majorany-Weyla.

Spinory w fizyce

Spinory Diraca, Lorentza, Weyla i Majorany są ze sobą powiązane a ich związek można wyjaśnić na podstawie rzeczywistej geometrycznie algebry.

Masywne cząsteczki takie jak elektrony opisywane są jako spinory Diraca. Klasyczne neutrino standardowego modelu fizyki cząstek jest przykładem spinora Weyl'a, lecz z ostatnich obserwacji oscylacji neutrin uważa się że nie są one spinorami Weyl'a a jednak spinorami Majorana. Nie wiadomo czy (½ spin) Weyl'a istnieje w przyrodzie lecz w 2015 odnaleziono kwazicząstki zachowujące się jak fermiony Weyl'a.

Przykład 2D

Niektóre proste przykłady spinorów o niewielkich rozmiarach wynikają z rozważenia równych podalgebr algebry Clifforda $C\ell_{p,q}$ (R). Jest to algebra zbudowana z ortonormalnej podstawy n = p + q wzajemnie ortogonalnych wektorów z dodatkiem i mnożeniem, z których p ma normę +1, a q ma normę -1, z regułą produktu dla wektorów bazowych.

$$e_i e_j = \begin{cases} +1 & i = j,\, i \in (1 \ldots p) \\ -1 & i = j,\, i \in (p+1 \ldots n) \\ -e_j e_i & i \neq j. \end{cases}$$

Algebra Clifforda $C\ell_{2,0}$(R) zbudowana jest na podstawie jednej jednostki: skalarnej, 1, dwóch ortogonalnych wektorów jednostkowych, σ_1 i σ_2 oraz jednej jednostki pseudoskalarnej i = $\sigma_1\sigma_2$. Z powyższych definicji wynika, że $(\sigma_1)_2 = (\sigma_2)_2 = 1$ i $(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2) = -\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2 = -1$.

Przykład 2D

Dopuszcza operację koniugacji (analogiczną do sprzężenia zespolonego), czasami nazywaną odwrotnością elementu Clifforda, zdefiniowaną przez:

$$(a + b\sigma_1\sigma_2)^* = a + b\sigma_2\sigma_1$$

Która dzięki relacjom Clifforda zapisujemy jako:

$$(a + b\sigma_1\sigma_2)^* = a + b\sigma_2\sigma_1 = a - b\sigma_1\sigma_2$$

Działanie równego elementu Clifforda $\gamma \in C\ell^0_{2,0}(R)$ na wektory uważane za jednostopniowe elementy $C\ell_{2,0}(R)$ są określane przez odwzorowanie ogólnego wektora $u = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$ na wektor:

$$\gamma(u) = \gamma u \gamma^*$$

Gdzie γ^* jest sprzężeniem γ a produktem jest mnożenie Clifforda. W tej sytuacji spinor jest zwykłą liczą zespoloną.

Przykład 2D

Działanie γ na spinorze φ jest podawane przez zwykłe mnożenie złożone:

$$\gamma(\phi) = \gamma\phi.$$

Istotną cechą tej definicji jest rozróżnienie między zwykłymi wektorami i spinorami, przejawiające się w tym w jaki sposób równomierne elementy działają na każdą z nich na różne sposoby. Ogólnie rzecz biorąc szybkie sprawdzenie relacji Clifforda ujawnia że równe stopnie elementów łączą się z normalnymi wektorami:

$$\gamma(u) = \gamma u \gamma^{*} = \gamma^{2} u$$

Z drugiej strony, w porównaniu z działaniem na spinorach γ (φ) = γφ, γ na zwykłych wektorach działa jak kwadrat jego działania na spinory.

Przykład 2D

Rozważmy dla przykładu implikację tego dla rotacji płaskich. Obracanie wektora o kąt θ odpowiada $\gamma_2 = \exp(\theta\, \sigma_1\sigma_2)$, tak aby odpowiednie działanie na spinorach odbywało się przez $\gamma = \pm \exp(\theta\, \sigma_1\sigma_2 / 2)$. Generalnie, z powodu logarytmicznego rozgałęzienia, niemożliwe jest wybranie znaku w spójny sposób. Tak więc reprezentacja rotacji płaskich na spinorach jest dwuwartościowa.

W zastosowaniach spinorów w dwóch wymiarach powszechne jest wykorzystywanie faktu, że algebra równomiernych elementów jest identyczna z przestrzenią spinorów. Tak więc, poprzez nadużywanie języka, dwa są często łączone. Można wtedy mówić o "działaniu spinora na wektorze". W ogólnym ustawieniu takie stwierdzenia są bez znaczenia. Ale w wymiarach 2 i 3 (stosowanej na przykład do grafiki komputerowej) mają sens.

Spinory???

Podsumowując spinory możemy opisać w prostych słowach jako „wektory przestrzeni których transformacje są w szczególny sposób powiązane z obrotami przestrzeni fizycznej”. Niemniej jednak pojęcie to jest powszechnie uważane za notoryczne trudne do zrozumienia co ilustruje wypowiedź Michaela Atiyah :

Nikt w pełni nie rozumie spinorów. Ich algebra jest formalnie rozumiana, ale ich ogólne znaczenie jest tajemnicze. W pewnym sensie opisują one "pierwiastek kwadratowy" geometrii i podobnie jak zrozumienie pierwiastka kwadratowego z -1 zajęło wieki, to samo może dotyczyć spinorów.

Dziękuje za uwagę