Przestrzeń afiniczna

Natalia Juruś

Krystyna Prusak

Karolina Stopka

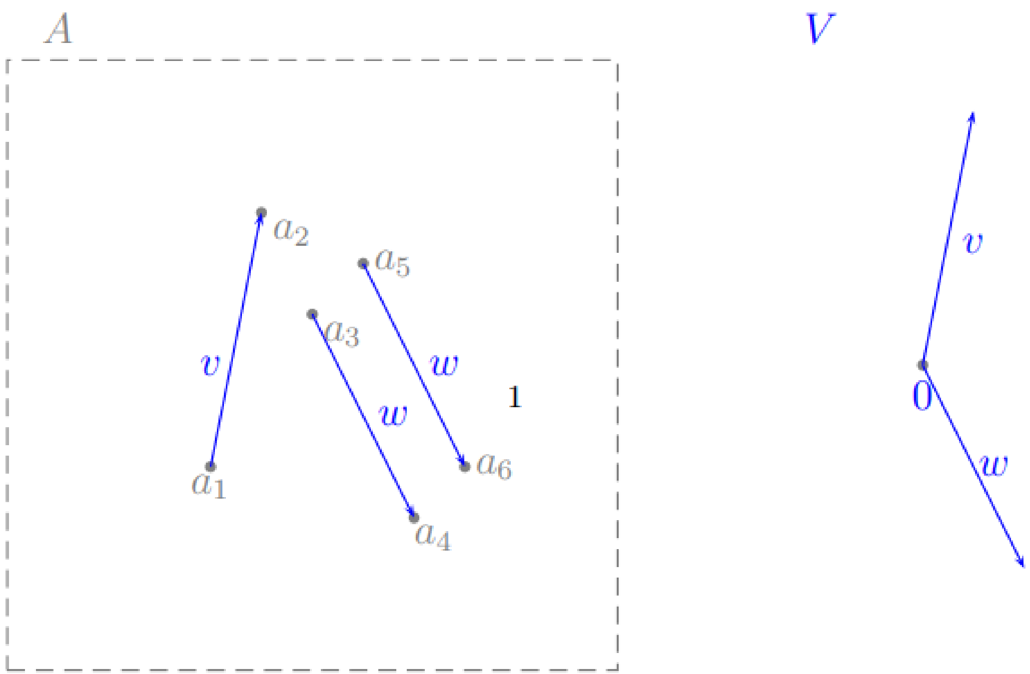
Fizyka Techniczna,
Nowoczesne materiały i Nanotechnologie

Wprowadzenie geometryczne

- Pojęcie przestrzeni afinicznej pojawiło się w związku z odkryciami geometrii nieeuklidesowych (różniących się od geometrii euklidesowej aksjomatem równoległości).
- Zakwestionowanie pojęć długości i kąta, które opierają są na pojęciu odległości, doprowadziło do przedefiniowania przestrzeni euklidesowej poprzez usunięcie z definicji wspomnianych pojęć i powiązanych z nimi elementów.
- Wynikiem tego było powstanie geometrii afinicznej, w której struktura algebraiczna przestrzeni okazała się mieć własności podobne do przestrzeni liniowej (ta ostatnia została zdefiniowana później, dając początek algebrze liniowej).

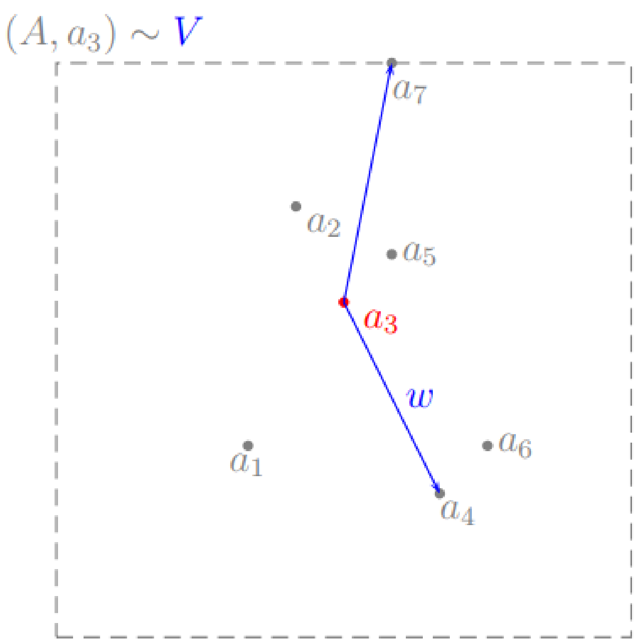
Przestrzeń afiniczna a wektorowa

- Zanim zapiszemy formalną definicję przestrzeni afinicznej przypomnijmy, że na przestrzeń afiniczną możemy patrzeć jak na przestrzeń wektorową w której brakuje wyróżnionego punktu zerowego.
- Od jednego punktu przestrzeni afinicznej do drugiego można się dostać za pomocą wektora.



Przestrzeń afiniczna a wektorowa

- Na naszym obrazku ten sam wektor w prowadzi z punktu a_3 do a_4 i z punktu a_5 do a_6. Jeśli w przestrzeni afinicznej wyróżnimy jeden punkt staje się ona identyczna z przestrzenią wektorową.
- Na przykład jeśli wyróżnimy punkt a_3, to punkt a_4 odpowiadał będzie wektorowi w. Wektor v identyfikowany jest z punktem a_7:



Przestrzeń afiniczna- definicja i właściwości

Zapiszmy formalną definicję przestrzeni afinicznej:

Definicja 1. *Przestrzenią afiniczną wymiaru n nazywamy trójkę $(A, V, \oplus)$ gdzie A jest zbiorem, V przestrzenią wektorową wymiaru n, $\oplus$ odwzorowaniem dodawania wektorów do punktów A mającym następujące własności*

(1) *dla dowolnych $a \in A$ i $v, w \in V$ zachodzi $a \oplus (v + w) = (a \oplus v) \oplus w$,*

(2) *dla każdego $a \in A$ $\quad a \oplus \overrightarrow{0} = a$,*

(3) *dla każdych dwóch elementów $a, b \in A$ istnieje dokładnie jeden wektor $v \in V$ taki, że $a \oplus v = b$.*

Ze względu na własność (1) w dalszym ciągu nie będziemy w notacji rozróżniać między $\oplus$ i $+$.

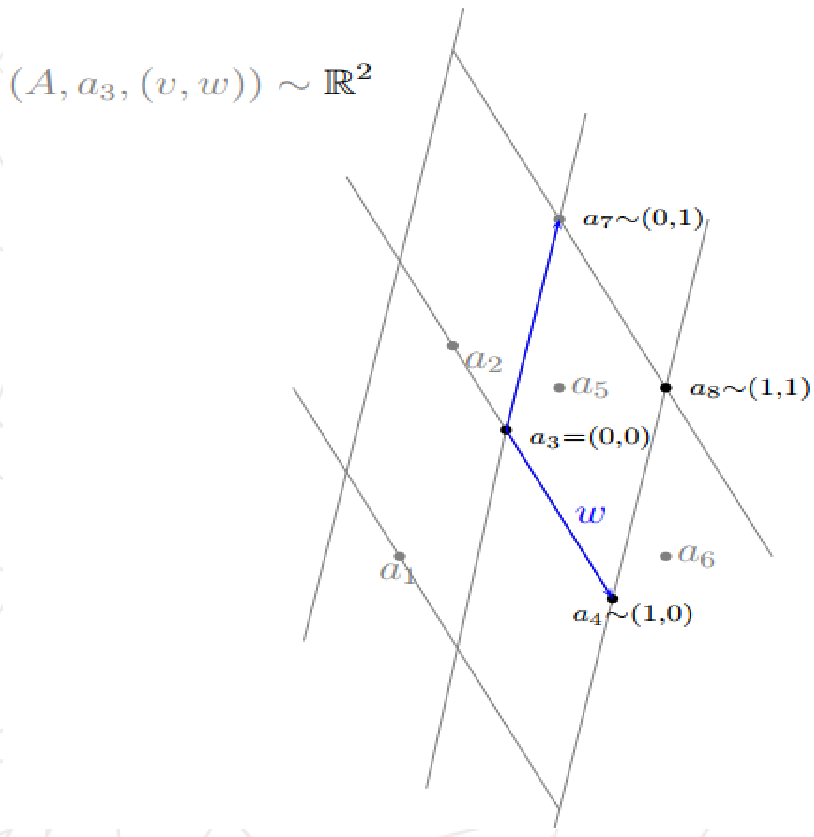
Czyli np.: W przestrzeniach afinicznych można *odejmować* punkty by wyznaczyć *wektory,* oraz *przesuwać punkt o wektor,* tzn. dodawać wektory do punktu.

Zasada postępowania

- Oczywiście, chcąc policzyć coś konkretnego, musimy używać współrzędnych.
- Wybór bazy w przestrzeni wektorowej umożliwia reprezentowanie wektorów za pomocą współrzędnych. Innymi słowy wybór bazy zadaje izomorfizm naszej przestrzeni wektorowej *V* z $\mathbb{R}^n$.
- Żeby wprowadzić współrzędne w przestrzeni afinicznej trzeba jeszcze wybrać jeden punkt, w którym zaczepimy wektory bazowe.
- Wybór punktu utożsamia przestrzeń afiniczna z wektorową, a wybór bazy przestrzeń wektorową z $\mathbb{R}^n$.

Przykład

- Jeśli w naszej przestrzeni *A* wyróżnimy, jak poprzednio, punkt a_3 a w przestrzeni *V* wybierzemy bazę składającą się z wektorów (v,w) otrzymamy siatkę współrzędnych:



Przykład

- Podobną operację wykonujemy zazwyczaj rozwiązując zadanie z mechaniki czy też elektrostatyki.
- Dobieramy początek układu współrzędnych i kierunek osi tak, żeby było nam wygodnie. Często wybór odpowiednich współrzędnych jest najważniejszą i najtrudniejszą częścią zadania.
- Wynika z tego, że przestrzeń fizyczna, w której dzieją się opisywane przez nas na wykładach i ćwiczeniach zjawiska fizyczne to nie jest $\mathbb{R}^3$. To raczej afiniczna przestrzeń, modelowana na trójwymiarowej przestrzeni wektorowej, którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^3$ w sposób dla nas wygodny.

Przekształcenie afiniczne

Niech *A* będzie n-wymiarową przestrzenią afiniczną, a V_n stowarzyszoną z nią przestrzenią wektorową:

Definicja 2. *Przekształcenie* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *nazywamy afiniczny gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe* $L : V_n \to V_n$ *dla dowolnych* $P, Q \in \mathcal{A}$ *zachodzi:*

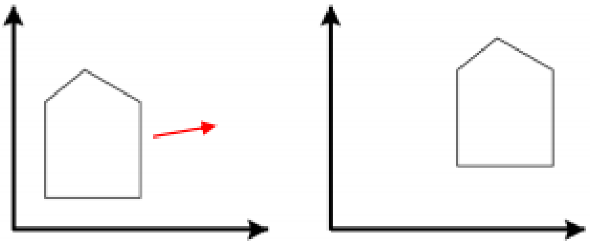
$$F(P)F(Q) = L\left(PQ\right).$$

Jeżeli $O\mathcal{A}$ jest ustalonym punktem, to dowolny $P \in \mathcal{A}$ można zapisać jako $P = O + \boldsymbol{x}$, gdzie $\boldsymbol{x} \in V_n$. Połóżmy $F(P) = O + \boldsymbol{y}$. Można pokazać, że przekształcenie F jest afiniczne gdy $\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}$, gdzie $\boldsymbol{b} \in V_n$ jest zdefiniowane przez $F(O) = O + \boldsymbol{b}$.

Zasadnicze przekształcenia afiniczne

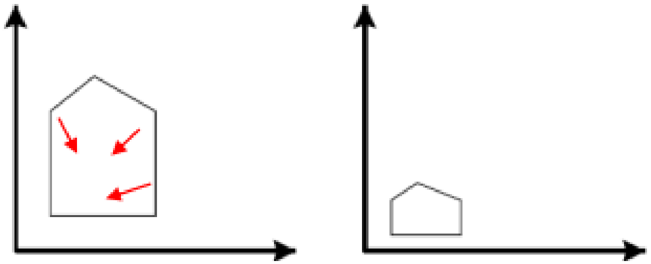
- Przesunięcie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



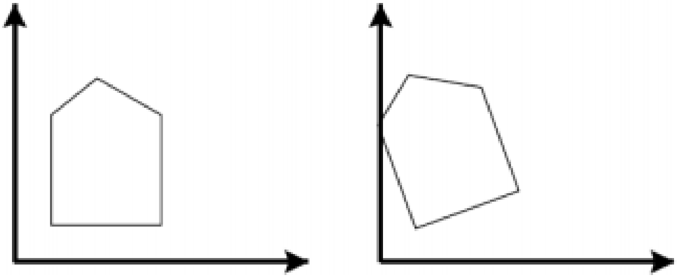
- Skalowanie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{bmatrix}$$



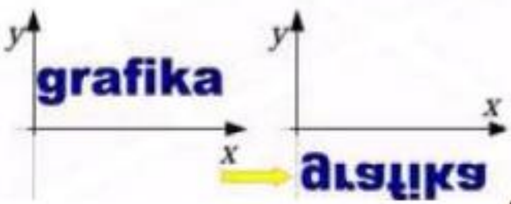
- Obrót

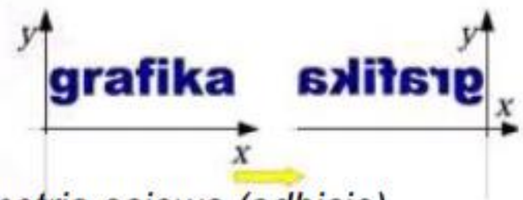
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



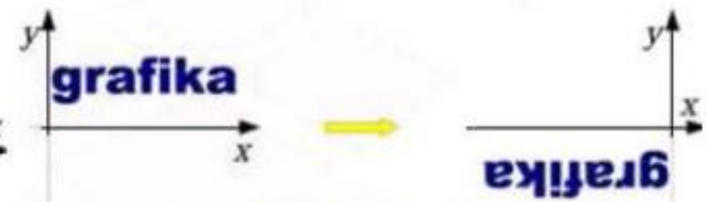
Pochodne przekształceń afinicznych

$$M_{SOX}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad M_{SOY}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad M_{SS}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



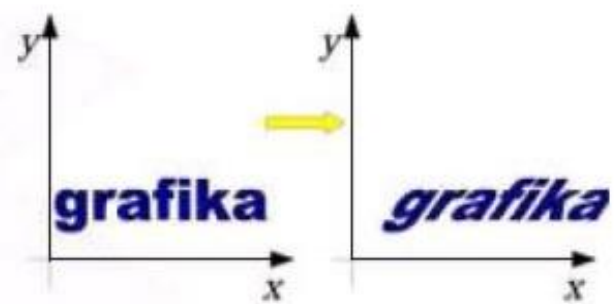


symetria osiowa (odbicie)



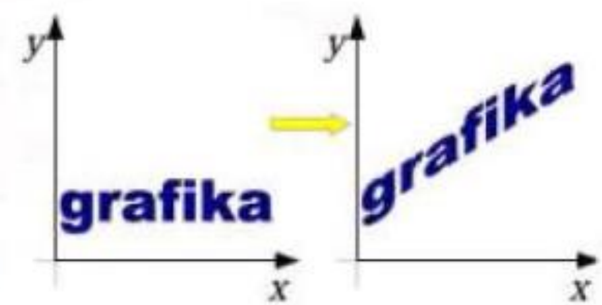
symetria środkowa

$$M_{Px}=\begin{bmatrix}1 & H_x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

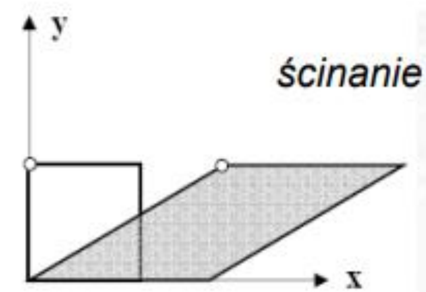


$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & h_x & 0\\ h_y & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

$$M_{Py}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ H_y & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



pochylenie



ścinanie

Niezmienniki afiniczne

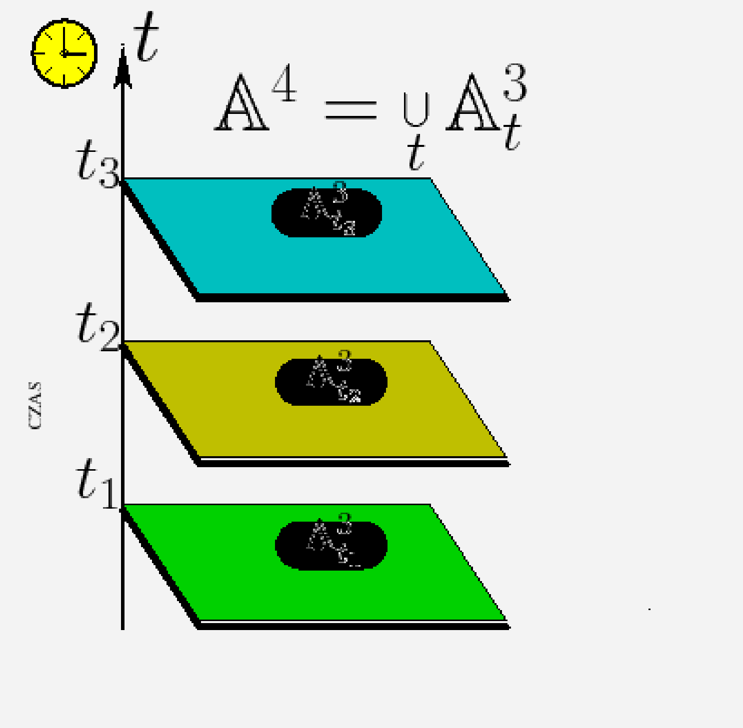
- Zachowywane przy pokrewieństwach własności figur geometrycznych nazywa się **niezmiennikami afinicznymi**;

Niezmienniki określające jednoznacznie grupę przekształceń afinicznych:

- prosta, odcinek, wektor
- współliniowość punktów (nie dotyczy prostej),
- równoległość prostych, wypukłość figur,
- trójkąt, równoległobok,
- równość wektorów,
- stosunek długości równoległych odcinków,
- stosunek pól figur (na płaszczyźnie),
- stosunek pól figur na płaszczyznach równoległych (w przestrzeni),
- elipsa, parabola, hiperbola.

Struktura matematyczna czasoprzestrzeni

- Czasoprzestrzeń jawi się jako zbiór punktów, których nieprzeliczalna ilość podpowiada nam hipotezę o jego ciągłości.
- Zdarzenia o tej samej wartości zmiennej czasowej, tworzą 3-wymiarową podprzestrzeń afiniczną $\mathbb{A}^3$ zdarzeń jednoczesnych. Jednoczesność jest relacją równoważności, która dzieli czasoprzestrzeń na klasy rozłącznych zdarzeń jednoczesnych.



Przestań afiniczna – charakterystyka:

- Cechą charakterystyczną n-wymiarowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}^n$ jest to, że określone są w niej jedynie operacje przesunięcia (zwane translacjami), reprezentowane przez wektory n-wymiarowej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$
  Zauważmy, że w definicji, nie wyróżniamy żadnego z elementów przestrzeni $\mathbb{A}^n$ każdy z nich równie dobrze może posłużyć za początek układu współrzędnych.

Czasoprzestrzenna struktura Galileusza:

- jest to czterowymiarowa przestrzeń afiniczna $\mathbb{A}^4$, zbudowana ze zdarzeń elementarnych. Przesunięcia równoległe w tej przestrzeni są izomorficzne z rzeczywistą przestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$
- czas jest mierzony składową wektorów translacji $\mathbb{R}^4$, wzdłuż osi czasowej $\mathbb{R}^1$. Jeśli interwał czasowy $t(p,q)=0$ pomiędzy dwoma zdarzeniami $p,q \in \mathbb{A}^4$, wtedy o zdarzeniach takich mówimy że są jednoczesne. Zbiór zdarzeń jednoczesnych z określonym zdarzeniem tworzy trójwymiarową podprzestrzeń afiniczną $\mathbb{A}^3$ zdarzeń jednoczesnych. Ponieważ jednoczesność jest relacją równoważności, dlatego czasoprzestrzeń można przedstawić jako sumę topologiczną podprzestrzeni zdarzeń jednoczesnych

$$\mathbb{A}^4 = \bigcup_t \mathbb{A}^3_t.$$

- odległość pomiędzy dwoma zdarzeniami jednoczesnymi $p,q \in \mathbb{A}^3$, zadana jest iloczynem skalarnym $||q-p|| = \sqrt{(q-p)(q-p)}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$

Bibliografia

- http://www.fuw.edu.pl/~konieczn/wyklad_1.pdf
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Przestrze%C5%84_afiniczna
- http://ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/wyklady/skrypt-maciejewski-umk.pdf
- V.I. Arnold, „Mathematical Methods of Classical Mechanics” 2nd edition, Springer-Verlag, 1989r.
- http://www.ire.pw.edu.pl/~arturp/Dydaktyka/grafika/grako_2w.pdf
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Przekszta%C5%82cenie_afiniczne
- http://skap.neostrada.pl/Mechanika/mechanika/node4.html

Dziękujemy za uwagę!