Pole wektorowe

Przygotowali

Sylwester Dudys

Michał Brańka

Paweł Knutelski

Wektor

- Jest to operator różniczkowy pierwszego rzędu działający na funkcję określoną na M
- Jeżeli mamy jakaś parametryzacje można stosować ja do reprezentowania wektorów stycznych do przestrzeni M (tzn operatorów różniczkowych na M) jako kombinacji liniowych operatorów w postaci $\frac{\partial}{\tau^i}$ bez konieczności „wychodzenia" poza m i interpretowania tych wektorów jako „strzałek" w większej przestrzeni A^n

- Możemy zatem myśleć abstrakcyjnie o M jako o rozmaitości różniczkowalnej. Pod tą nazwą będziemy rozumieli pare (M,A) gdzie M jest zbiorem punktów zaś A jest atlasem zupełnym czyli zbiorem lokalnych parametryzacji terminem tym oznaczamy odwracalne odwzorowanie typu :

$$R^n \supset U \ni (x^k) \to \kappa(x^k) = x \in O \supset M, \qquad (1)$$

- Dla którego dziedzina u jest zbiorem otwartym. Zupełność atlasu A oznacza ze obrazy tych parametryzacji pokrywają cały zbiór M: każde punkty $x \in M$ leży w obrazie $im(\kappa)$ jakiejś parametryzacji κ

$$x \in im(\kappa) = 0. \qquad (2)$$

Konstrukcję wiązki stycznej którą będziemy się posługiwać można wytłumaczyć następująco - dla każdej parametryzacji (1) na M zdefiniujemy parametryzację na TM następującym wzorem:

$$R^{2n} \supset U \times R^n \ni (x^k , v^l) \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa_T (x^k , v^l) = v_l := x^k \frac{\partial}{\partial xk} \in O_T = U_{x\in O} T_x M \subset TM \qquad (3)$$

pierwsze n współrzędnych parametryzuje punkt zaczepienia, zaś pozostałe n wyróżnia konkretny wektor w przestrzeni stycznej T_xM. Ponieważ wzory transformacyjne na składowe wektora przy przejściu do innej mapy zawierają już pierwsze pochodne funkcji przejścia dla samych współrzędnych, prawa transformacyjne w tak skonstruowanym atlasie AT są jeden raz mniej różniczkowalne niż oryginalne prawa transformacyjne w oryginalnym atlasie A.

Pole wektorowe to kolekcja wektorów: po jednym w każdym punkcie rozmaitości. Jeśli zatem zastosować je do funkcji f, to otrzymamy kolekcję wartości, po jednej w każdym punkcie, czyli nową funkcję. Można wobec tego podać następującą definicję pola wektorowego:

Pole wektorowe jest to operator różniczkowy, ciągły

$$X : C^1_{loc} \to C_{loc} \tag{4}$$

Spełniające warunki:

1. X(af + bg) = aX(f) + bX(g),
2. 2. X(fg) = fX(g) + gX(f).

Zastosowaliśmy tutaj zastrzeżenie „loc” w oznaczeniu zbioru funkcji, aby podkreślić lokalny charakter tych obiektów: funkcje nie muszą być określone na całej rozmaitości M a jedynie lokalnie, na otoczeniu punktu, który nas interesuje. W takich przestrzeniach rozważamy topologię zbieżności niemal jednostajnej w C_{loc} i niemal jednostajnej wraz z pochodnymi pierwszego rzędu w C^1_{loc} Jeśli X jest polem wektorowym, to jego wartość X(x) w punkcie x ∈ M, dana wzorem

$$(X(x))(f) := (X(f))(x) \qquad (5)$$

Jest także wektorem zaczepionym w punkcie x:

$$(X(x)) \in T_xM \quad (6)$$

gdzie zbiór T_xM jest przestrzenią styczną do rozmaitości M w punkcie x ∈ M. Jeśli wybierzemy dowolną mapę (τ^i) w otoczeniu x, to operatory $\frac{\partial}{\tau^i}$ stanowią bazę przestrzeni T_xM. Oznacza to, że każdy wektor jest kombinacją powyższych.

Wobec tego powyższą definicję pola wektorowego można zapisać bardziej lokalnie, jako odwzorowanie różniczkowalne z rozmaitości M w rozmaitość TM:

$$M \supset O \ni x \rightarrow X(x) \in TM$$

Lokalnie, w układzie współrzędnych, całą informację o polu wektorowym niesie n funkcji X l których wartość koduje wartość współrzędnych wektora

$$X(x) = X^l(x) \frac{\partial}{\partial x^l}$$

w zależności od współrzędnych punktu zaczepienia x.

Pole jest gładkie klasy C^s jeśli te funkcje są takiej klasy. I znów ma to sens jedynie dla $s \leq l-1$, bowiem nawet gdyby w jednej mapie s było większe, to po transformacji do innej mapy nie ma szans na utrzymanie tak wysokiego stopnia gładkości, skoro prawa transformacyjne są jedynie (l-1) razy różniczkowalne.

Można zatem patrzeć na pole wektorowe, jako na odwzorowanie gładkie:

$$X : M \to TM$$

z bazy M wiązki stycznej w samą przestrzeń wiązki TM i takie, że wartość X(x) tego odwzorowania w punkcie x należy do włókna T_xM wiązki. Ten ostatni warunek oznacza, że rzut τ czyni z X odwzorowanie tożsamościowe:

$$\tau \circ X = id$$

Gładkie odwzorowanie z bazy wiązki w jej przestrzeń, spełniające ten warunek nazywa się cięciem wiązki stycznej

Przykładami pól wektorowych znanymi z fizyki są:

- pole grawitacyjne - pole wektorów natężenia pola grawitacyjnego
- pole elektryczne - pole wektorów natężenia pola elektrycznego
- pole magnetyczne - pole wektorów indukcji magnetycznej
- pole prędkości i potencjał zespolony przepływu – określa prędkość przepływu płynu w każdym punkcie przestrzeni

Dywergencja pola wektorowego

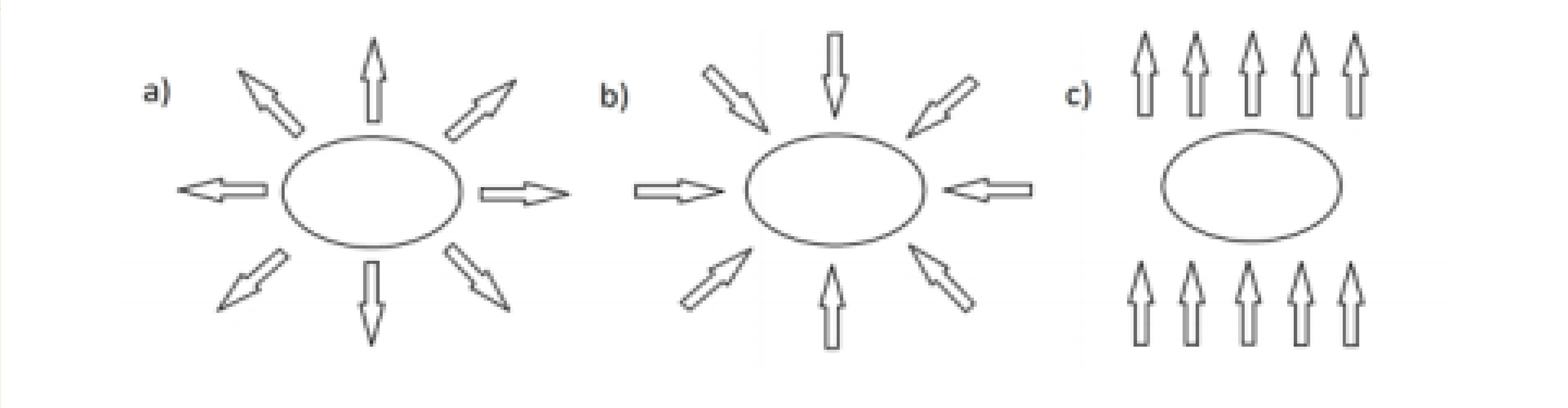
to operator różniczkowy przyporządkowujący trójwymiarowemu polu wektorowemu pole skalarne będące formalnym iloczynem skalarnym operatora nabla z polem. Operator dywergencji pojawia się w sposób naturalny w kontekście całkowania form zewnętrznych w przestrzeni trójwymiarowej, a więc ma szereg konkretnych interpretacji fizycznych, związanych np. z mechaniką płynów

We współrzędnych kartezjańskich dywergencję możemy zdefiniować następująco:

Dla różniczkowalnego pola wektorowego $\vec{F}= (Fx\ , Fy\ , Fz)$ dywergencja równa jest funkcji skalarne

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fz}{\partial z}$$

Zwróćmy uwagę na zapis dywergencji za pomocą operatora nabla, jest ona iloczynem skalarnym tego operatora z wektorem składowych pola wektorowego.



Rysunek: a) dywergencja jest dodatnia (masa ucieka z układu), b) dywergencja jest ujemna (masa wpływa do układu), c) dywergencja jest równa 0 (tyle samo masy wpływa i wypływa z układu)

Rotacja jest operatorem wektorowym opisującym nieskończenie małą rotację trójwymiarowego pola wektorowego. W każdym punkcie przestrzeni pole rotacji opisywane jest przez wektor, którego kierunek i długość opisują wirowość pola w danym punkcie. We współrzędnych kartezjańskich rotację różniczkowalnego pola wektorowego

$\vec{F} = (Fx\ , Fy\ , Fz)$ definiujemy jako pole wektorowe o postaci:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Można zauważyć, że rotacja jest de facto iloczynem wektorowym operatora nabla i pola wektorowego. Jeśli rotacja pola jest zerowa, mówimy o polu bezwirowym. Bezwirowość pola jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym jego potencjalności (pole potencjalne to takie, w którym praca nie zależy od drogi tylko od położenia punktów przed i po przesunięciu, np. pole grawitacyjne).

Bibliografia

- Jerzy Kijowski

„Geometria różniczkowa jako narzędzie nauk przyrodniczych"

- Andrzej Trautman

„Grupy oraz ich reprezentacje z zastosowaniami w fizyce"