POLE GRAWITACYJNE JAKO POLE UKŁADÓW INERCJALNYCH

MARLENA SZLĘK
BENIAMIN JURSA

SPIS TREŚCI

WSTĘP

- Niniejsza prezentacja stanowi refleksje nad równaniami drugiego rzędu. Takich równań dostarcza nam np. mechanika, gdzie ruchem „punktu materialnego o masie *m*” rządzi druga zasada Newtona, będąca właśnie równaniem drugiego rzędu:

$$\ddot{x}^k = \frac{1}{m} F^k(x,t)$$

Wiemy też, że powyższe równanie obowiązuje jedynie „w układzie inercjalnym”, bowiem w układzie „nieinercjalnym” przyspieszenie wcale nie pokrywa się z drugą pochodną, lecz jest jeszcze obciążone różnymi dodatkami (Coriolisa, dośrodkowe itd.). Niniejszy rozdział poświęcimy na konstrukcji narzędzi do prostej analizy tych że obciążających dodatków.

WSTĘP - PRZYKŁAD

- Zacznijmy od prostego przypadku przestrzeni afinicznej. Tak właśnie wygląda czasoprzestrzeń w modelu stworzonym przez Galileusza i Newtona. Warto bowiem traktować czas i przestrzeń na tym samym poziomie. Jeśli zatem *(y^a) = (t, x, y, z)* stanowi prostoliniowy układ współrzędnych w takiej czterowymiarowej przestrzeni afinicznej, to trajektorie ciał „swobodnych” (tzn. takich, na które nie działa żadna siła) są liniami prostymi, czyli po prostu rozwiązaniami równania różniczkowego.

$$\ddot{y}^a = 0$$

WSTĘP

Do czasów Einsteina panowała zgoda, że „prawdziwe” równania dynamiki należy zawsze odnosić do „układu inercjalnego”, utożsamiając to pojęcie z prostoliniowym układem współrzędnych w Galileuszowsko-Newtonowskiej (czyli po prostu afinicznej) czasoprzestrzeni. Dopiero Einstein poddał w wątpliwość ten dogmat i przypuścił myśl, że czasoprzestrzeń jest krzywa, to znaczy nie istnieją na niej żadne układy prostoliniowe. Jeśli jednak jego postulat „względności”, to znaczy niezależności praw fizyki od układu współrzędnych, jest spełniony, to jaki sens miałoby równanie Newtona , oczywiście nie miało by sensu i żadnego odniesienia do rzeczywistości jeżeli traktowało by cały układ globalnie, natomiast lokalnie sprawa wygląda już inaczej.

POLE GRAWITACYJNE

Pole grawitacyjne należy sobie wyobrażać jako pole lokalnych układów inercjalnych. Równania Newtona należy odnosić właśnie do układów inercjalnych. Nie wyklucza to jednak posługiwania się układami nieinercjalnymi. Poza przypadkiem płaskim inercjalność układu współrzędnych może być jedynie punktowa: gdy jest on inercjalny w punkcie x, to w sąsiednich punktach już zazwyczaj nie. W takich sytuacjach jesteśmy zmuszeni do stosowania nieinercjalnego układu współrzędnych.

WSPÓŁCZYNNIK KONEKSJI- DEFINICJA

- Powiazaniem („koneksja”) na rozmaitości *M* nazywamy cięcie wiązki *KM*,

$$M \ni x \rightarrow \Upsilon(x) \in K_x M,$$

czyli wyróżnienie w każdym punkcie szczególnego układu odniesienia i to w taki sposób, by jego współrzędne $\Gamma^m_{kl}(x)$ były funkcjami gładkimi. Układy współrzędnych należące do wybranej klasy nazywamy układami inercjalnymi w punkcie x. Krzywa, która w każdym swym punkcie spełnia równanie różniczkowe jesli tylko nazywa się ortodroma. Elementy tablicy liczbowej $\Gamma^m_{kl}(x)$ nazywa się „współczynnikami koneksji”.

WSPÓŁCZYNNIK KONEKSJI -WNIOSKI

- Wniosek 1: Równanie ortodromy w dowolnym (niekoniecznie inercjalnym) układzie współrzędnych wygląda następująco:

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{kl}(x)\dot{x}^k\dot{x}^l = 0$$

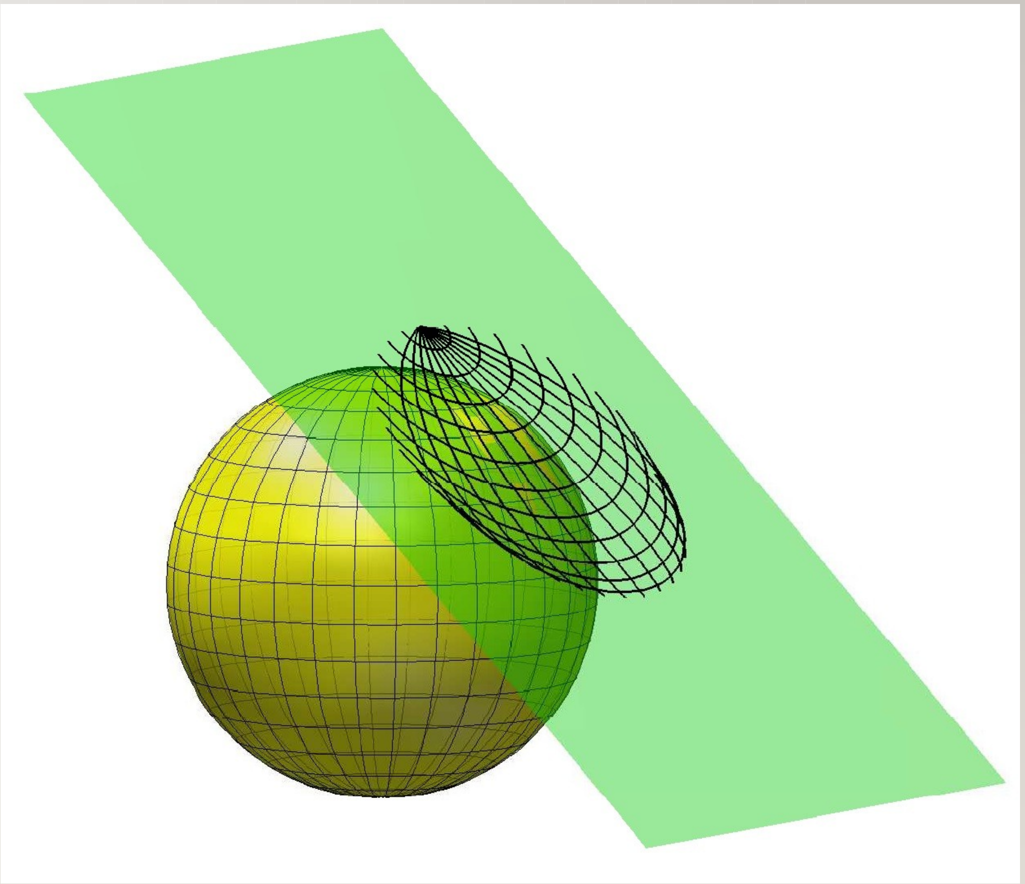
Widzimy że współczynniki koneksji $\Gamma^m_{kl}(x)$ niosą pełną informację o strukturze powiązania $\Upsilon(x)$

Wniosek 2: Układ współrzędnych (x^k) jest inercjalny w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki koneksji znikają w tym punkcie, tzn. gdy $\Gamma^m_{kl}(x) = 0$.

PRZYKŁAD

- Przedmiot zainteresowania żeglarzy: powierzchnia globu ziemskiego, czyli sfera S^2, jest wyposażona w naturalną strukturę powiązania. Tego właśnie powiązania używają nawigatorzy do obliczania ortodromy. Opisujemy je w następujący sposób: układ inercjalny w dowolnym punkcie $x \in S^2$ to rzut prostopadły na sferę dowolnego układu prostoliniowego na płaszczyźnie stycznej do sfery w tym punkcie.

(patrz Rysunek 23) – Rzut siatki geograficznej na płaszczyznę styczną kuli.



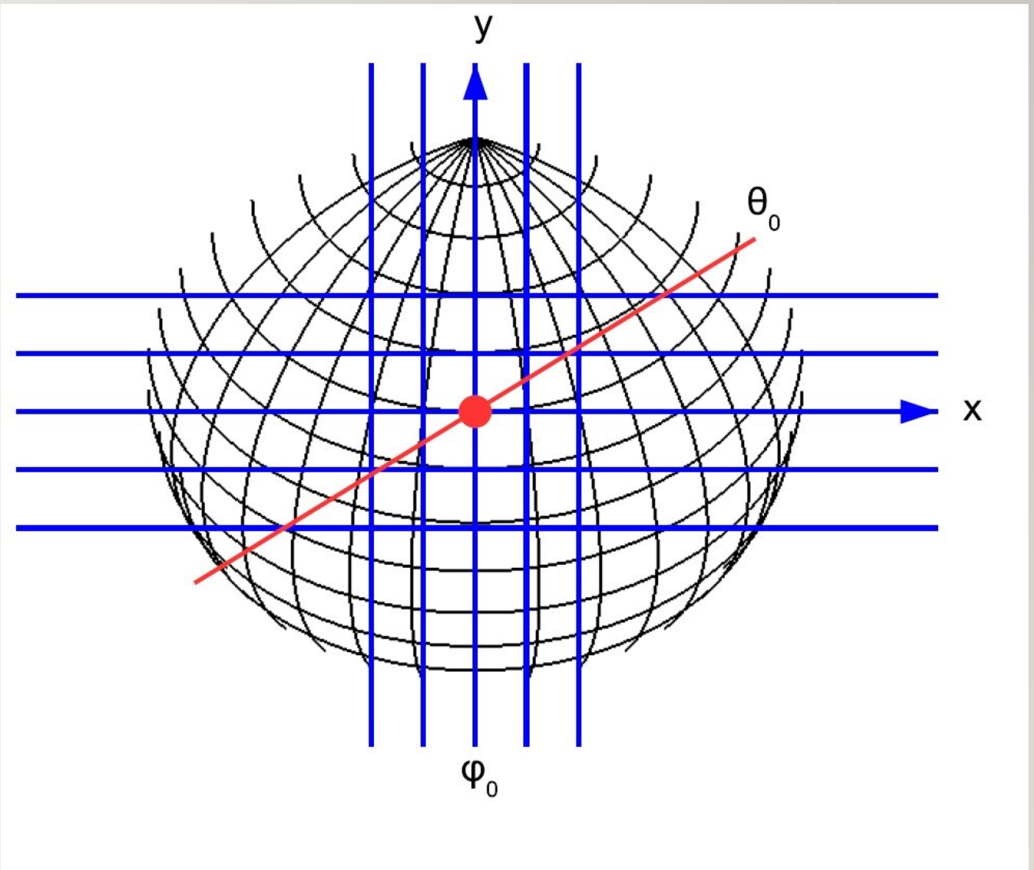
PRZYKŁAD

- Relacje między rzutem na sferę tych współrzędnych prostoliniowych a współrzędnymi geograficznymi ilustruje rysunek 24. Wyliczając drugie pochodne jednych względem drugich otrzymujemy opis tego powiązania we współrzędnych geograficznych (θ, φ), to znaczy wartość współczynników koneksji $\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = ctg\theta$ przy czym pozostałe znikają.

Ortodroma, to linia spełniająca równania $\ddot{x}^m + \Gamma^m_{kl}(x)\dot{x}^k\dot{x}^l = 0$ to znaczy:

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\theta}\, ctg\theta$$



Rys. 24 – Współrzędne geograficzne a lokalne współrzędne „prostoliniowe” na sferze.

BIBLIOGRAFIA

- **J. Kijowski**, *„Geometria różniczkowa jako narzędzie nauk przyrodniczych”* , Warszawa 2013