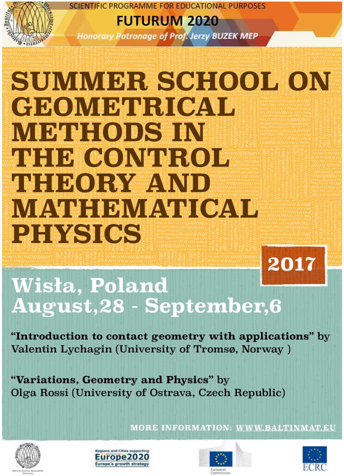
Nowoczesny rachunek wariacyjny. Przemyślenia po letniej szkole fizyki matematycznej w Ustroniu.

Ewa Borsuk, Józef Borsuk

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

29 listopada 2017

Summer school



Rozmaitość M:

(1) lokalnie przypomina R^n,
(2) jest przestrzenią topologiczną,
(3) występuje w niej pokrycie otwarte $M^n \supset U$, które wprowadza układ współrzędnych:

$(U, x^1, ..., x^n)$,
$(V, x^1, ..., x^n)$.

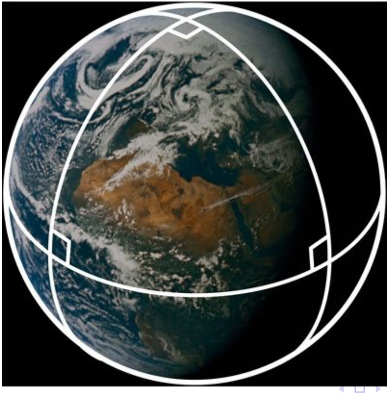
Jeżeli $p \in U \cap V$, wówczas istnieje różniczkowalna zmiana współrzędnych:

$x^i = f^i_{U,V}(x^j)$

(4) Jeżeli występuje pokrycie otwarte na rozmaitości: $M = U \cup V \cup ...$, które można zastąpić pokryciem skończonym, to wtedy mówimy, że rozmaitość jest zwarta.

Rozmaitość- przykłady

Rozmaitość (ang. manifold) jest przestrzenią topologiczną, którą lokalnie można interpretować jako przestrzeń euklidesową.



Rozmaitość- przykłady:

- przestrzeń $M^n = R^n$,
- kula $M^n = B_a(r) = \{x : |x - a| < r\}$,
- kula domknięta $M^n = \{x : |x - r| \leqslant r\}$,
- $M^n = S^n$,
- iloczyn/produkt rozmaitości
  $L^{n+r} = M^n \times W^r = \{(p, q)|p \in M^n, q \in W^n\}$,
  $S^1 \times S^1 = T^2$,
  $S^1 \times S^1 \times ... \times S^1 = T^n$.

Przestrzeń styczna i kostyczna

- Przestrzeń styczna
  p(t)- krzywa gładka na rozmaitości,
  p(t)=$[x^1(t), ..., x^n(t)]$.
  Wektor styczny w punkcie t=x:
  v=$[\frac{dx^1}{dt}, ..., \frac{dx^n}{dt}]$.
  Przestrzeń styczna rozmaitości w punkcie x, $T_x M$ jest zbiorem wszystkich wektorów stycznych do krzywej w punkcie x.
- Przestrzeń kostyczna- jest to przestrzeń dualna przestrzeni stycznej w punkcie x:
  $(T_x M)^* = T_x^* M$
  Elementy przestrzeni kostycznej są zwane wektorami kostycznymi, są to funkcjonały liniowe.

Push-forward i pull-back

Push-forward

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "F_*"] \arrow[d] & TN \arrow[r, "G_*"] \arrow[d] & TW \arrow[d] \\
M \arrow[r, "F"] & N \arrow[r, "G"] & W
\end{tikzcd}$$

Pull-back

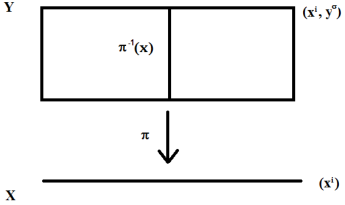
$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

$$\begin{tikzcd}
T^*M \arrow[d] & T^*N \arrow[l, "F^*"'] \arrow[d] & T^*W \arrow[l, "G^*"'] \arrow[d] \\
M \arrow[r, "F"] & N \arrow[r, "G"] & W
\end{tikzcd}$$

Wiązki włókniste

X n-wymiarowa rozmaitość
Y (m+n)-wymiarowa rozmaitość
$\pi^{-1}(x)$ włókno
$\pi : Y \to X$ wiązka

cięcie wiązki włóknistej π:
$\gamma : X \supset U \to Y$
$\gamma \circ \pi = id_U$
$\gamma(x) = (x^i, \gamma^\sigma(x))$



Przykłady wiązek

- Wiązka styczna TM
  $$\begin{array}{c} \bigcup_{p \in M} T_pM = TM \\ \downarrow \\ \mathrm{M} \end{array}$$
- Wiązka kostyczna T^*M
  $$\begin{array}{c} \bigcup_{p \in M} T_p^*M = T^*M \\ \downarrow \\ \mathrm{M} \end{array}$$
- Walec - RxS^1
- wstęga Möbiusa - RxS^1

Izomorfizm

Lokalne odwzorowanie:

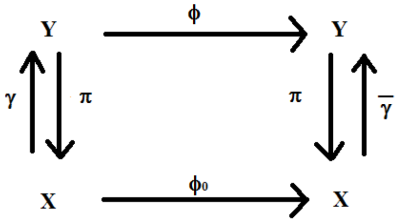
$\phi : Y \to Y$

$\phi_0 : X \to X$

$\pi \circ \phi = \phi_0 \circ \pi$

Przeniesienie cięcia w cięcie:

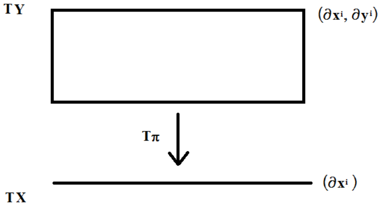
$\bar{\gamma} = \phi \circ \gamma \circ \phi_0^{-1}$



Wertykalne pola wektorowe

Rzutowanie wertykalnego pola wektorowego daje zero $T\pi(\xi) = 0$

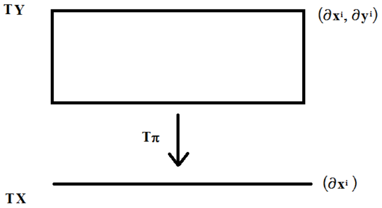
ξ jest postaci: $\xi = \xi^\sigma(x^k, y^\sigma)\frac{\partial}{\partial y^\sigma}$



Rzutowalne pola wektorowe

$$\xi = \xi_0^i(x^k)\frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^\sigma(x^k, y^\sigma)\frac{\partial}{\partial y^\sigma}$$

$$T\pi(\xi) = \xi_0^i(x^k)\frac{\partial}{\partial x^i} \in TX$$



Kontakt rzędu r

Dwa cięcia γ_1 i γ_2 mają kontakt rzędu r w punkcie $x \in U$ jeśli:

$\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$
$\partial^p \gamma_1(x) = \partial^p \gamma_2(x)$ dla p=1,...,r.

Dżet r-ty

Przestrzeń dżetów powstaje poprzez prolongację cięcia γ

$J^r_x\gamma$ - klasa równoważności krzywych, mających kontakt rzędu r w punkcie x.
$J^r\gamma = \bigcup_{x \in X} J^r_x\gamma$
Dla jednowymiarowej rozmaitości X dżet rzędu r ma następujące współrzędne:
$J^r\gamma = (t, \gamma^\sigma, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}, ..., \frac{d^r\gamma}{dt^r})$
Np.:
$J^1\gamma = (t, \gamma^\sigma, \frac{d\gamma}{dt})$

Rzutowanie

Wiązka ma postać:

$\pi_r : J^r Y \to X$: $\quad J^r\gamma = (t, \gamma^\sigma, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}, ..., \frac{d^r\gamma}{dt^r}) \to (t)$

$\pi_{r,0} : J^r Y \to Y$: $\quad J^r\gamma = (t, \gamma^\sigma, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}, ..., \frac{d^r\gamma}{dt^r}) \to (t, \gamma)$

$\pi_{r,s} : J^r Y \to J^s Y$: $\quad J^r\gamma = (t, \gamma^\sigma, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}, ..., \frac{d^r\gamma}{dt^r}) \to (t, \gamma, .., \frac{d^s\gamma}{dt})$

Współrzędne w $J^r Y$:

$(t, y^\sigma, y_1^\sigma, y_2^\sigma, ..., y_r^\sigma)$

Prolongacja pola wektorowego

Pole wektorowe ξ:

$$\xi = \xi_0^i(x^k)\frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^\sigma(x^k, y^\sigma)\frac{\partial}{\partial y^\sigma}$$

$$J^1\xi = \xi + \xi_j^\sigma \frac{\partial}{\partial y_j^\sigma} \qquad \xi_j^\sigma = d_j\xi^\sigma - y_i^\sigma \frac{\partial \xi^i}{dx^j}$$

$$J^2\xi = J^1\xi + \xi_{jk}^\sigma \frac{\partial}{\partial y_j^\sigma \partial y_k^\sigma} \qquad \xi_{jk}^\sigma = d_k\xi_j^\sigma - y_{ji}^\sigma \frac{\partial \xi^i}{dx^k}$$

Forma

Forma jest elementem przestrzeni dualnej.

- 1-forma:
  Kombinacja liniowa form bazowych dx, dy i dz
  $u = u_x dx + u_y dy + u_z dz$
- 2-forma:
  $v = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy$
- Operacja "$\wedge$" jest nazywana iloczynem zewnętrznym form.
  $u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u$
  $dx \wedge dx = 0$

Forma horyzontalna

$\eta(\xi) = 0$ dla każdego wertykalnego pola ξ

Forma ta jest postaci:
$f(x^k, y^\sigma)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$

Forma kontaktowa

Forma η jest kontaktowa, gdy znika na prolongacjach cięć:

$(J^r\gamma)^*\eta = 0$
Przykład:
Dla dim X=1 i dim Y =1

Forma: $\omega = dq - \dot{q}dt$
$\gamma = (t, \gamma)$
$(J^1\gamma) = (t, \gamma, \frac{d\gamma}{dt})$
$(J^1\gamma)^*\omega = d\gamma - \frac{d\gamma}{dt}dt = 0$

k-forma kontaktowa

- η jest 1-kontaktowa gdy dla każdego pola wertykalnego ξ $i_\xi \eta$ jest horyzontalna
- η jest 2-kontaktowa gdy dla każdego pola wertykalnego ξ $i_\xi \eta$ jest 1-kontaktowa
- η jest q-kontaktowa gdy dla każdego pola wertykalnego ξ $i_\xi \eta$ jest (q-1)-kontaktowa

Kanoniczna dekompozycja form różniczkowych

Każda k-forma na J^rY ma jednoznaczny rozkład na część horyzontalną i q-kontaktowe formy k=1,2,..,q, na $J^{r+1}Y$:

$$\pi^*_{r+1,r}\eta = h\eta + p_1\eta + p_2\eta + p_q\eta$$

$h\eta$- część horyzontalna η
$p_q\eta$- q-kontaktowa część η
$\pi^*_{r+1,r}\eta$- pull-back formy η z J^rY do wyższej przestrzeni $J^{r+1}Y$

Działanie

Lagranżjan - horyzontalna forma λ na $J^r Y$:

$$\lambda = L(t, q^\sigma, q_1^\sigma, ..., q_r^\sigma)dt$$

Ω - podrozmaitość w X z brzegiem $\partial\Omega$

$\delta_\Omega(\pi)$ - zbiór cięć γ

$$\delta_\Omega(\pi) \ni \gamma \rightarrow \lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega J^r\gamma^*\lambda \in R$$

Działanie lagranżjanu

Działanie

Lagranżjan - horyzontalna forma λ na $J^r Y$:

$$\lambda = L(t, q^\sigma, q_1^\sigma, ..., q_r^\sigma)dt$$

Ω - podrozmaitość w X z brzegiem $\partial\Omega$

$\delta_\Omega(\pi)$ - zbiór cięć γ

$$\delta_\Omega(\pi) \ni \gamma \to \lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega J^r\gamma^*\lambda \in R$$

Działanie lagranżjanu

Działanie

Lagranżjan - horyzontalna forma λ na $J^r Y$:

$$\lambda = L(t, q^\sigma, q_1^\sigma, ..., q_r^\sigma)dt$$

Ω - podrozmaitość w X z brzegiem $\partial\Omega$

$\delta_\Omega(\pi)$ - zbiór cięć γ

$$\delta_\Omega(\pi) \ni \gamma \to \lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega J^r\gamma^*\lambda \in R$$

Działanie lagranżjanu

Działanie

Lagranżjan - horyzontalna forma λ na $J^r Y$:

$$\lambda = L(t, q^\sigma, q_1^\sigma, ..., q_r^\sigma)dt$$

Ω - podrozmaitość w X z brzegiem $\partial\Omega$

$\delta_\Omega(\pi)$ - zbiór cięć γ

$$\delta_\Omega(\pi) \ni \gamma \to \lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega J^r \gamma^* \lambda \in R$$

Działanie lagranżjanu

Niejednoznaczność lagranżjanu

Dla każdej kontaktowej formy η działanie nie ulega zmianie:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\lambda = \int_\Omega J^r\gamma^*(\lambda + \eta)$$

Deformacja cięcia

$$(-\epsilon, \epsilon) \ni u \to \lambda_{\phi_{0u}(\Omega)}(\phi_u \gamma \phi_{0u}^{-1}) = \int_{\phi_{0u}(\Omega)} J^r(\phi_u \gamma \phi_{0u}^{-1})^* \lambda \in R$$

$$\left(\frac{d}{du} \lambda_{\phi_{0u}(\Omega)}\right)_{u=0} = \left(\frac{d}{du} \int_{\phi_{0u}(\Omega)} (J^r \phi_u \circ J^r \gamma \circ \phi_{0u}^{-1})^* \lambda\right)_{u=0}$$

$$= \left(\frac{d}{du} \int_\Omega J^r \gamma^* (J^r \phi_u^* \lambda)_{u=0}\right)$$

$$= \int_\Omega J^r \gamma^* \left(\frac{d}{du} J^r \phi_u^* \lambda\right)_{u=0}$$

$$= \int_\Omega J^r \gamma^* \partial_{J^r \xi} \lambda.$$

Pierwsza wariacja

$$\delta_\Omega(\pi) \ni \gamma \to (\partial_{J^r\xi}\lambda)_\Omega = \int_\Omega J^r\gamma^* \partial_{J^r\xi}\lambda \in R$$

Pochodna Liego:

$$\partial_{J^r\xi}\lambda = i_{J^r\xi}d\lambda + di_{J^r\xi}\lambda$$

Pierwsza wariacja

$$\delta_\Omega(\pi) \ni \gamma \longrightarrow (\partial_{J^r\xi}\lambda)_\Omega = \int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}\lambda \in R$$

Pochodna Liego:

$$\partial_{J^r\xi}\lambda = i_{J^r\xi}d\lambda + di_{J^r\xi}\lambda$$

Dygresja: Pochodna Liego

$x = v\partial_1 \qquad \alpha = a_i dx^i \qquad$ Iloczyn wewnętrzny: $i_x\alpha = \alpha(x)$

$$\mathcal{L}_x\alpha = \mathcal{L}_x(a_i dx^i) = (di_x + i_x d)(a_i dx^i)$$

$$= da_i dx^i(x) + i_x(\tfrac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i)$$

$$= d(a_i v\delta^i_1) + \tfrac{\partial a_i}{\partial x^j} i_x(dx^j \wedge dx^i)$$

$$= d(a_1 v) + \tfrac{\partial a_i}{\partial x^j}(v\delta^j_1 dx^i - dx^j v\delta^i_1)$$

$$= \tfrac{\partial a_1 v}{\partial x^i} dx^i + \tfrac{\partial a_i}{\partial x^1} vdx^i - \tfrac{\partial a_1}{\partial x^j} vdx^j$$

$$= \tfrac{\partial a_1}{\partial x^i} dx^i + a_1\tfrac{\partial v}{\partial x^i} + \tfrac{\partial a_i}{\partial x^1} vdx^i - \tfrac{\partial a_1}{\partial x^j} vdx^j$$

$$= a_1\tfrac{\partial v}{\partial x^i} dx^i + \tfrac{\partial a_i}{\partial x^1} vdx^i$$

Pierwsza wariacja

Jeśli:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\lambda = \int_\Omega J^r\gamma^*(\lambda+\eta)$$

to działanie przyjmuje postać:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}(\lambda+\eta)$$

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}(\lambda+\eta) = \int_\Omega J^r\gamma^* i_{J^r\xi} d(\lambda+\eta) + \int_\Omega J^r\gamma^* d i_{J^r\xi}(\lambda+\eta)$$

Należy znaleźć 1-kontaktową formę η, aby powyższe wyrażenie stanowiło pierwszą wariację.

Pierwsza wariacja

Jeśli:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\lambda = \int_\Omega J^r\gamma^*(\lambda+\eta)$$

to działanie przyjmuje postać:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}(\lambda+\eta)$$

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}(\lambda+\eta) = \int_\Omega J^r\gamma^* i_{J^r\xi} d(\lambda+\eta) + \int_\Omega J^r\gamma^* d i_{J^r\xi}(\lambda+\eta)$$

Należy znaleźć 1-kontaktową formę η, aby powyższe wyrażenie stanowiło pierwszą wariację.

Pierwsza wariacja

Jeśli:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\lambda = \int_\Omega J^r\gamma^*(\lambda+\eta)$$

to działanie przyjmuje postać:

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}(\lambda+\eta)$$

$$\int_\Omega J^r\gamma^*\partial_{J^r\xi}(\lambda+\eta) = \int_\Omega J^r\gamma^* i_{J^r\xi} d(\lambda+\eta) + \int_\Omega J^r\gamma^* d i_{J^r\xi}(\lambda+\eta)$$

Należy znaleźć 1-kontaktową formę η, aby powyższe wyrażenie stanowiło pierwszą wariację.

Zadanie (r=1)

$$\lambda = L dt \qquad \eta = \eta_\sigma \omega^\sigma$$

Pole wektorowe:
$\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma}$

Pochodna sumy form:
$d(\lambda + \eta) = dL \wedge dt + d\eta_\sigma \wedge \omega^\sigma - \eta_\sigma \omega_1^\sigma \wedge dt$

$$= ((\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d\eta_\sigma}{dt})\omega^\sigma + (\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma} - \eta_\sigma)\omega_1^\sigma) \wedge dt + (\frac{\partial \eta_\sigma}{\partial q^\nu}\omega^\nu + \frac{\partial \eta_\sigma}{\partial q_1^\nu}\omega_1^\nu) \wedge \omega^\sigma$$

Zadanie (r=1)

Działanie:

$$i_{J^1\xi}d(\lambda+\eta) = ((\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d\eta_\sigma}{dt})(\xi^\sigma - q_1^\sigma \xi^0) + (\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma} - \eta_\sigma)(\xi_1^\sigma - q_2^\sigma \xi^0))dt$$
$$-((\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d\eta_\sigma}{dt})\omega^\sigma + (\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma} - \eta_\sigma)\omega_1^\sigma)\xi^0$$
$$+(\frac{\partial \eta_\sigma}{\partial q^\nu}(\xi^\nu - q_1^\nu \xi^0) + \frac{\partial \eta_\sigma}{\partial q_1^\nu}(\xi_1^\nu - q_2^\nu \xi^0))\omega^\sigma$$
$$-(\frac{\partial \eta_\sigma}{\partial q^\nu}\omega^\nu + \frac{\partial \eta_\sigma}{\partial q_1^\nu}\omega_1^\nu)(\xi^\sigma - q_1^\sigma \xi^0)$$

gdzie:

$$\xi_1^\sigma = \frac{d\xi^\sigma}{dt} - q_1^\sigma \frac{d\xi^0}{dt}$$

Zadanie (r=1)

Formy kontaktowe znikają w $J^1\gamma$:

$$J^1\gamma^* i_{J^1\xi} d(\lambda + \eta) =$$
$$\left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d\eta_\sigma}{dt}\right)(\xi^\sigma - q_1^\sigma \xi^0) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma} - \eta_\sigma\right)(\xi_1^\sigma - q_2^\sigma \xi^0)\right)dt$$

$$= [-\xi^0\left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d\eta_\sigma}{dt} q_1^\sigma\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma} - \eta_\sigma\right) q_2^\sigma\right)$$

$$+\xi^\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d\eta_\sigma}{dt}\right) + \xi_1^\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma} - \eta_\sigma\right)]dt$$

Równanie Eulera-Lagrange'a

Narzuca się, aby pole wektorowe ξ_1^σ nie pojawiało się w poprzednim równaniu.
Podstawiamy:

$$\eta_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma}$$

$$\eta = \frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma}\omega^\sigma$$

Otrzymujemy:
$J^1\gamma^* i_{J^1\xi} d(\lambda + \eta) = (\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma})(\xi^\sigma - q_1^\sigma \xi^0)dt$
Równanie Eulera-Lagrange'a.

Forma Lapage'a

Równania Eulera-Lagrange'a występują w 1-kontaktowej, horyzontalnej części wariacji:
$(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_1^\sigma}) = p_1 d(\lambda + \eta)$

Forma Lapage'a ϱ:
$\lambda = h\varrho$- część horyzontalna ϱ

Forma dynamiczna

$$p_1 d\varrho = \left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} + \sum_{k=1}^{r}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial L}{\partial q_k^\sigma}\right)\omega^\sigma \wedge dt$$

Koniec

Dziękujemy za uwagę.