# GWIAZDKA HODGE’A

PIOTR ANDRZEJCZUK

TOMASZ JAGLARZ

KAMILA LISOWSKA

W algebrze liniowej iloczyn skalarny pozwala na utożsamienie przestrzeni wektorowej z jej dualną.

Podobnie, w geometrii różniczkowej, metryka riemannowska na rozmaitości pozwala zamieniać pola wektorowe na 1-formy.

Dodatkowo, gdy rozważana rozmaitość (n-wymiarowa) jest zorientowana, to można utożsamiać p-formy z (n-p)-formami; tym zajmuje się właśnie gwiazdka Hodge'a.

Załóżmy zatem, że mamy n-wymiarową zorientowaną rozmaitość z metryką Riemanna **g**; nazwijmy ją **M**. Wówczas na M istnieje forma objętości wyznaczona przez metrykę i orientację: w dowolnych lokalnych współrzędnych ($x_1$, ..., $x_n$) ma ona postać:

$$\mathrm{dvol}_M = \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \text{ gdzie } g_{ij} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}).$$

Zauważmy dodatkowo, że metryka wyznacza również iloczyn skalarny na 1-formach (które utożsamiamy z polami wektorowymi), a w konsekwencji, na p-formach. Wystarczy taki iloczyn zdefiniować na formach postaci:

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^p$$

Definiujemy zatem iloczyn skalarny wzorem:

$$\langle e^1 \wedge \ldots \wedge e^p, f^1 \wedge \ldots \wedge f^p \rangle = \det(g(e^i, f^j))$$

W końcu definiujemy gwiazdkę Hodge'a jako takie przekształcenie ★ z p-form do (n-p)-form, że dla dowolnej p-formy $\omega$ prawdziwa jest następująca zależność:

$$\omega \wedge \star \eta = \langle \omega, \eta \rangle dvol_M$$

Wyznaczenie postaci laplasjanu we współrzędnych sferycznych.

Zauważamy, że: $\star dx = dy \wedge dz, \ \star dy = dz \wedge dx, \ \star dz = dx \wedge dy$

Współrzędne sferyczne zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= \sin(\theta)\cos(\varphi)dr + r\cos(\varphi)\cos(\theta)d\theta - r\sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi \\ dy &= \sin(\theta)\sin(\varphi)dr + r\sin(\varphi)\cos(\theta)d\theta + r\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \\ dz &= \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Pamiętając, że metryka na $R^3$ wyraża się wzorem:

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Wyrazimy ją teraz za pomocą zmiennych (r, Ɵ, ɸ). Otrzymujemy:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2$$

Stąd wnioskujemy, że trójka $(dr, rd\Theta, r\sin(\Theta)d\phi)$ jest ortonormalną bazą 1-form, ponadto jest ona dodatnio zorientowana, co łatwo widać po przejściu do dualnych pól wektorowych.

Teraz możemy wyznaczyć wynik działania gwiazdki Hodge'a na bazowych formach:

$$\star dr = r^2 \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi$$
$$\star d\theta = \sin(\theta) d\varphi \wedge dr$$
$$\star d\varphi = \frac{1}{\sin(\theta)} dr \wedge d\theta$$

$$\star d \star df = \triangle f$$

$$\triangle f = \star d \star \left( \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \right) =$$
$$\star\, d \left( r^2 \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} d\theta \wedge d\varphi + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} d\varphi \wedge dr + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} dr \wedge d\theta \right) =$$
$$\star\Big(\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \sin(\theta) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) r^2 \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi \wedge dr +$$
$$\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} r^2 \sin(\theta) d\varphi \wedge dr \wedge d\theta\Big) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta}) +$$
$$\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Ostatecznie:

$$\triangle = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Dziękujemy za uwagę!

Bibliografia: John C. Baez, Javier P. Munianin: *Gauge fields, knots and gravity*

xd