Całkowanie metodą Monte Carlo

Na przykładzie "rzucania kamykami"

M. Borowiec J. Pabis J. Wójcik

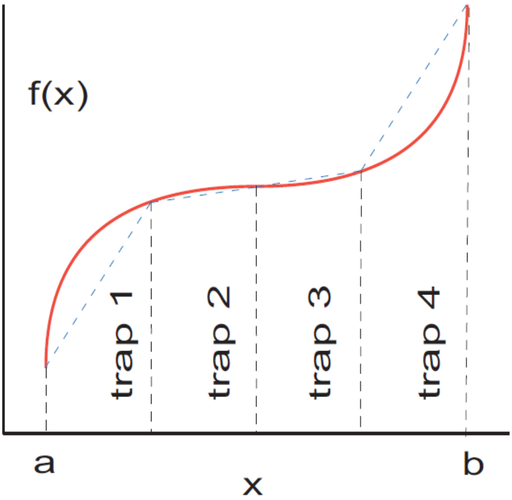
Techniki komputerowe w fizyce

Całkowanie metodą Monte Carlo

Całkowanie numeryczne

- Całkowanie numeryczne to metoda numeryczna polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych.
- Metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach.
- Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie dzieli się przedział całkowania na niewielkie fragmenty.
- Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach.

Całkowanie metodą trapezów



Całkowanie metodą trapezów

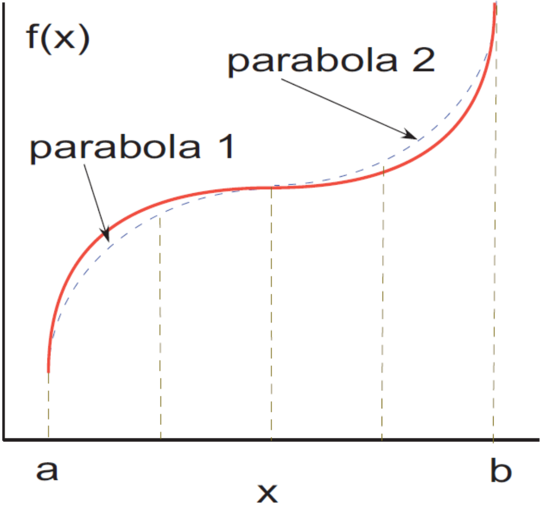
- W metodzie trapezów wykorzystuje się wartości $f(x)$ dla równoodległych warości x
- N pukntów $x_i (i = 1, N)$ jest równo rozmieszczonych na całym obszarze całkowania $[a, b]$, tworząc $(N - 1)$ odcinków o długości $h = (b - a)/N - 1$
- Następnie na całym obszarze całkowania tworzone są trapezy o podstawie h przyjmujące średnią wysokość $(f_i + f_{i+1})/2$ jako wartość f

Całkowanie metodą trapezów

Przybliżona wartość całki na obszarze całkowania jest sumą pól wszystkich trapezów i wynosi:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h(f_i + f_{i+1})}{2} = \frac{1}{2}hf_i + \frac{1}{2}hf_{i+1} \tag{1}$$

Całkowanie metodą Simpsona



Całkowanie metodą Simpsona

- Dla każego przedziału funkcja podcałkowa jest aproksymowana parabolą.
- W metodzie Simpsona liczba przedziałów całkowania musi być parzysta.
- Znając wartości funkcji w trzech punktach x_0, x_1, x_2 takich, że $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$ oraz z zastosowaniem wielomioanu Lagrange'a można aproksymować wartość funkcji.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \tag{2}$$

Całkowanie przy użyciu kwadratur Gaussa

Kwadraturą nazywamy wynik rodziału czynnika wagowego od funkcji podcałkowej:

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b W(x)g(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} w_i g(x_i) \tag{3}$$

Całkowanie przy użyciu kwadratur Gaussa

W kwadraturze Gaussa czynniki wagowe w_i oraz ilość N są dobierane w taki sposób, aby błędy aproksymacji zanikały, gdy $g(x)$ staje się wielomianem $(2N - 1)$ stopnia.
Jeżeli $g(x)$ jest gładka lub może być gładka przy odpowiednio dobranym $W(x)$, to algorytmy z użyciem kwadratur Gaussa dadzą dużo dokłądniejsze wyniki niż te z użyciem metody trapezów lub Simpsona.

Metoda Monte Carlo

Metoda całkowania Monte Carlo przedstawia zupełnie odmienne podejście do problemu całkowania, ze względu na szacowanie przy użyciu liczb (pseudo)losowych.

Problem hodowcy ryb

Hipotetyczny hodowca ryb wybrał się do swoich najdalszych włości w celu dodania glonojadnych ryb do zainfekowanego przez glony stawu.
Dopiero na miejscu hodowca zorientował się, że aby dodać odpowiednią ilość ryb do stawu, konieczna jest znajomość jego powierzchni.
Problem hipotetycznego hodowcy: **zmierzyć powierzchnię nieregularnie ukształtowanego stawu używając wyłącznie tego, co "pod ręką".**

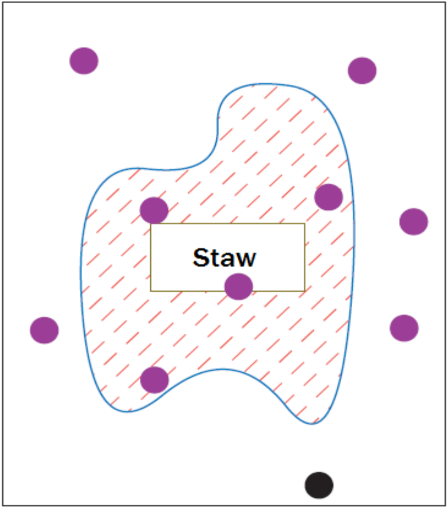
Problem hodowcy ryb

Aby obliczyć powierzchnię stawu posłużyć się można metodą próbkowania. W tym celu hipotetyczny hodowca powinien wykonać następujące kroki:

Problem hodowcy ryb

- Obejść prostokąt, w który wpisany jest staw i zebrać wszystkie leżące na ziemi kamyki.
- Zmierzyć w naturalnych jednostak (np. krokach) długość boków tego prostokątu. Następnie wyliczyć powierzchnię prostokątu A_p.
- Odmierzyć garść kamyków i rzucać je w górę w losowych kierunkach.
- Policzyć ilość "plusków" odpowiadających N_s - ilości kamyków, które wpadły do stawu. Policzyć ilość kamyków N_p leżących na ziemi w obrębie prostokąta.
- Przy założeniu, że rozrzut kamyków był losowy i równomierny, ilość kamyków w stawie powinna być proporcjonalna do powierzchni stawu A_s.

Problem hodowcy ryb



Problem hodowcy ryb

Powierzchnię tę można wyliczyć z proporcji:

$$\frac{N_s}{N_s + N_p} = \frac{A_s}{A_p} \implies A_s = \frac{N_s}{N_s + N_p} A_p \tag{4}$$

Implementacja całkowania Monte Carlo - estymacja Π

- Załóżmy, że rozważany staw jest okrągły i wpisany w kwadrat o boku 2 ($r = 1$).
- Wiemy, że analityczna powierzchnia koła $\oint dA = \Pi$.
- Od $i = 1$ do $i = N$ generowana jest para losowych liczb x_i, y_i z przedziału $[0, 1]$.
- Jeżeli $x_i^2 + y_i^2 < 1$, to liczba trafień += 1.
- Liczba trafień dzielona jest przez ilość iteracji $\implies$ oszacowane Π.
- Im większe N tym większa dokładność oszacowania.

+

Dziękujemy za uwagę.