Wahadło podwójne

Miron Nowak

Marzec 2017

1 Wahadło

Wahadło – ciało zawieszone w jednorodnym polu grawitacyjnym w taki sposób, że może wykonywać drgania wokół poziomej osi nie przechodzącej przez środek ciężkości zawieszonego ciała.

W mechanice rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje wahadeł:

- matematyczne (proste),
- fizyczne.

Ważną cechą wahadeł fizycznego i matematycznego jest niemal pełna niezależność ich okresu drgań od amplitudy, co jest dobrze spełnione dla małych wychyleń. Własność ta, zwana izochronizmem drgań, została odkryta około 1602 roku przez Galileusza, który używał wahadła do pomiaru czasu. Zainspirowany tą zasadą Christiaan Huygens zbudował w 1656 roku pierwszy zegar wahadłowy[2]. Zegary wahadłowe były najdokładniejszymi urządzaniami do pomiaru czasu aż do skonstruowania w latach 30. XX wieku zegarów kwarcowych.

W ogólności wahadło jest oscylatorem anharmonicznym, jego okres drgań i inne parametry zależy od amplitudy. Opis matematyczny rozwiązań równania ruchu wahadła jest w ogólności dość złożony, ale założenia upraszczające przyjmowane dla małych amplitud drgań pozwalają rozwiązać równania ruchu w sposób analityczny.

2 Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to punkt materialny poruszający się po okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym[1]. Równanie ruchu wahadła określa wzór:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta(t) = 0$$

gdzie: $\theta(t)$ - kąt odchylenia wahadła od pionu w chwili t, g - przyspieszenie ziemskie, l - długość nici.

2.1 Drgania dla małej amplitudy

W przybliżeniu dla małych drgań wahadła okres drgań nie zależy od amplitudy, a jedynie od długości wahadła i przyspieszenia grawitacyjnego.

$$sin\theta \approx \theta$$

Ogólne równanie ruchu wahadła upraszcza się do postaci:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie: θ_0 – amplituda drgań, $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ – częstość kołowa drgań, φ – faza początkowa drgań.
Okres drgań jest związany z częstością wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

2.2 Okres drgań o dowolnej amplitudzie

Dla dużych amplitud wahań okres drgań zależy od amplitudy i rośnie wraz z jej wzrostem. Zależność okresu od amplitudy opisuje wzór:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

gdzie K jest zupełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju.

Zagadnienie ruchu wahadła można rozwiązać przybliżając funkcję sinus do dwóch wyrazów, wówczas równanie ruchu wahadła przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0$$

Przyjmując poniższe oznaczenia, przybliżonym rozwiązaniem jest:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t + \epsilon\cos(3\omega t)$$

$$\theta_0 = \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

$$\epsilon = \frac{1}{3}\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^3$$

Przybliżenie to wskazuje, że wahadło nie jest oscylatorem harmonicznym, a jego trzecia harmoniczna jest zależna w trzeciej potędze od amplitudy drgań.

Problemem konstruowania dokładnych zegarów wahadłowych, których szybkość chodu nie zależy od amplitudy drgań, zajmował się Christiaan Huygens, wykazał że niezależność szybkości chodu zapewni zmniejszanie długość nici wahadła wraz z wychyleniem, wykazał, że krzywą zmniejszającą długość wahadła jest cykloida o poziomej osi i promieniu równym ćwierci długości wahadła, jest ono wahadłem cykloidalnym[styl do poprawy]. Skonstruował wahadło o okresie niezależnym od amplitudy[12].

Problem wahadła o okresie niezależnym od amplitudy sprowadza się do wyznaczenia takiej krzywej, że ciało poruszając pod działaniem stałej siły grawitacji po niej w takim samym czasie przemieści się od punktu ruszenia do jej najniższego punktu. Krzywa zwana jest tautochroną i jest cykloidą.

2.3 Wahadło w stanie nieważkości

W stanie nieważkości siła grawitacji jest równoważona przez siłę bezwładności układu odniesienia. W wyniku czego ciało wahadła zachowuje się tak jakby na nie nie działała siła. W zależności od warunków początkowych ciało wahadła spoczywa (jest w równowadze trwałej) albo porusza się ruchem jednostajnym po okręgu.

3 Wahadło fizyczne

Jest to bryła sztywna zawieszona na stałej osi poziomej w jednorodnym polu grawitacyjnym. Bryła ta może wykonywać obroty dookoła tej osi. Wahadło rozważa się jako ruch obrotowy bryły sztywnej. Na wychylone z położenia równowagi wahadło działa moment siły:

$$M = mgd\sin\theta M = mgd\sin\theta$$

Równanie ruchu wahadła można wyrazić wzorem:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\sin\theta(t) = 0$$

Porównując to równanie z równaniem ruchu wahadła matematycznego, wprowadza się długość zredukowaną wahadła fizycznego

$$\ell_f = \frac{I}{md}$$

Wówczas równanie ruchu wahadła fizycznego ma identyczną postać jak równanie ruchu wahadła matematycznego, co oznacza że wszystkie wnioski dotyczące ruchu wahadła fizycznego są identyczne z wnioskami dotyczącymi wahadła matematycznego. Przykładowo okres drgań zapisuje się jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_f}{g}}$$

Rozważając wahadło matematyczne, czyli masę punktową zawieszoną na nieważkiej nici jako bryłę sztywną:

$$I = m\ell^2$$

$$d = \ell d = \ell$$

Po podstawieniu tych wielkości do równań wahadła fizycznego otrzymuje się równania ruchu wahadła matematycznego. Oznacza to, że wahadło matematyczne może być uważane jako szczególny przypadek wahadła fizycznego.

4 Uogólnienia

Wahadło rzeczywiste, złożone z ciała zawieszonego na nici, może być traktowane jako wahadło matematyczne, jeżeli spełnione są następujące założenia:

- Rozmiary ciała są niewielkie w porównaniu z długością nici.
- Nić jest nieważka.
- Nić jest nierozciągliwa.
- Wahadłu nadano warunki początkowe (prędkość początkową), takie że wykonuje drgania po okręgu w płaszczyźnie pionowej (a nie ruch po elipsie w płaszczyźnie poziomej).
- Na ciało działają jedynie siła ciężkości oraz siła reakcji nici (pomijalne są inne siły, np. siła oporów ruchu).

Wahadło matematyczne stanowi szczególny przypadek wahadła fizycznego (patrz niżej).
W fizyce rozważa się kilka modeli wahadeł, które nie spełniają założeń wahadła matematycznego lub fizycznego.
Przykładami są

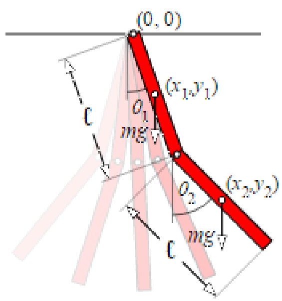
- wahadło sferyczne – ciało na nierozciągliwej nici, ale jego ruch nie jest ograniczony do płaszczyzny,

- wahadło stożkowe – ciało na nierozciągliwej nici, a ciało porusza się po okręgu,
- wahadło podwójne – ciało wahadła jest punktem zawieszenia kolejnego wahadła, może być rozważane jako płaskie i sferyczne, matematyczne i fizyczne,
- wahadło z rozciągliwą nicią,
- wahadło cykloidalne – wahadło o okresie niezależnym od amplitudy drgań

5 Wahadło podwójne

Symulacja wahadła podwójnego. Ruch odbywa się bez tarcia.

Wahadło podwójne składa się z dwóch wahadeł połączonych końcami.



Wahadło podwójne

Środek masy pierwszego wahadła:

$$x_1 = \frac{\ell}{2}\sin\theta_1,$$

$$y_1 = -\frac{\ell}{2}\cos\theta_1$$

Środek masy drugiego wahadła:

$$x_2 = \ell\left(\sin\theta_1 + \frac{1}{2}\sin\theta_2\right),$$

$$y_2 = -\ell\left(\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2\right).$$

Lagranżjan:

$$
\begin{aligned}
L &= \text{Energiakinetyczna} - \text{Energiapotencjalna} \\
&= \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mg\left(y_1 + y_2\right) \qquad = \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mg\left(y_1 + y_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
L = \frac{1}{6}m\ell^2\left[\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{1}{2}mg\ell\left(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right).
$$

Równania ruchu:

$$
\dot{p}_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2}m\ell^2\left[\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\frac{g}{\ell}\sin\theta_1\right]
$$

$$
\dot{p}_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2}m\ell^2\left[-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell}\sin\theta_2\right].
$$

Literatura

[1] Wahadło
`https://pl.wikipedia.org/wiki`

[2] Double pendulum
`https://en.wikipedia.org/wiki/Double`$_{p}endulum$

[3] Wahadło podwójne
http://visual.icse.us.edu.pl/wizualizacje/mechanika-teoretyczna

[4] Double pendulum formula `http://www.physics.usyd.edu.au`