

# Wahadło podwójne

Miron Nowak

Wahadło – ciało zawieszone w jednorodnym polu grawitacyjnym w taki sposób, że może wykonywać drgania wokół poziomej osi nie przechodzącej przez środek ciężkości zawieszonoego ciała.

W mechanice rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje wahadeł:

- matematyczne (proste),
- fizyczne.

Ważną cechą wahadeł fizycznego i matematycznego jest niemal pełna niezależność ich okresu drgań od amplitudy, co jest dobrze spełnione dla małych wychyleń

Wahadło matematyczne to punkt materialny poruszający się po okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym[1]. Równanie ruchu wahadła określa wzór:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$$

gdzie:  $\theta(t)$  - kąt odchylenia wahadła od pionu w chwili  $t$ ,  $g$  - przyspieszenie ziemskie,  $l$  - długość nici.

Jest to bryła sztywna zawieszona na stałej osi poziomej w jednorodnym polu grawitacyjnym. Bryła ta może wykonywać obroty dookoła tej osi. Wahadło rozważa się jako ruch obrotowy bryły sztywnej. Na wychylone z położenia równowagi wahadło działa moment siły:

$$M = mgd \sin \theta$$

Równanie ruchu wahadła można wyrazić wzorem:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin \theta(t) = 0$$

Wahadło rzeczywiste, złożone z ciała zawieszzonego na nici, może być traktowane jako wahadło matematyczne, jeżeli spełnione są następujące założenia:

- Rozmiary ciała są niewielkie w porównaniu z długością nici.
- Nici jest nieważka.
- Nici jest nierozciągliwa.
- Wahadłu nadano warunki początkowe (prędkość początkową), takie że wykonuje drgania po okręgu w płaszczyźnie pionowej (a nie ruch po elipsie w płaszczyźnie poziomej).
- Na ciało działają jedynie siła ciężkości oraz siła reakcji nici (pomijalne są inne siły, np. siła oporów ruchu).

Przykładami są

- wahadło sferyczne – ciało na nierozciągliwej nici, ale jego ruch nie jest ograniczony do płaszczyzny,
- wahadło stożkowe – ciało na nierozciągliwej nici, a ciało porusza się po okręgu,
- wahadło podwójne – ciało wahadła jest punktem zawieszenia kolejnego wahadła, może być rozważane jako płaskie i sferyczne, matematyczne i fizyczne,
- wahadło z rozciągliwą nicią,
- wahadło cykloidalne – wahadło o okresie niezależnym od amplitudy drgań

# Wahadło podwójne

## Symulacja

wahadła podwójnego. Ruch odbywa się bez tarcia.

Wahadło podwójne

składa się z dwóch wahadeł połączonych końcami.

Środek masy pierwszego wahadła:

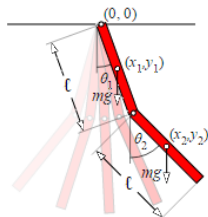
$$x_1 = \frac{\ell}{2} \sin \theta_1,$$

$$y_1 = -\frac{\ell}{2} \cos \theta_1$$

Środek masy drugiego wahadła:

$$x_2 = \ell \left( \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right),$$

$$y_2 = -\ell \left( \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right).$$



Lagranżjan:

$$L = \frac{1}{6} m \ell^2 \left[ \dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \frac{1}{2} m g \ell (3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

Równania ruchu:

$$\dot{p}_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m \ell^2 \left[ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3 \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 \right]$$

$$\dot{p}_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m \ell^2 \left[ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin \theta_2 \right].$$



Dziękuję za uwagę!