Układ Lorenza

Karolina Banasiewicz
Mahdi Maurycy El Khourani
Magdalena Oćwieja
Eryk Kozłecki

Styczeń, 2016

1 Wstęp

Lorenz obrazowo mawiał, że „nawet machnięcie skrzydeł motyla w Brazylii może wywołać tornado w Teksasie.” W roku 1963 ukazała się jego praca, w której przedstawił swój powszechnie dziś znany układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych, opisujący zjawiska atmosferyczne. Równania te pomogły mu pokazać, iż niewielka zmiana w jednym z punktów atmosfery może być przyczyną wielkich zmian w innym jej obszarze. Od tamtego czasu fakt, że niezwykle małe zaburzenia mogą prowadzić w rezultacie do rewolucyjnych zmian w różnych dziedzinach nauki, zwykło się nazywać efektem motyla. W naszym kontekście chodzi o wielką wrażliwość zachowania układów nieliniowych na niewielkie zmiany zadanych warunków początkowych.

2 O dziwnych atraktorach?

2.1 Trochę historii...

W 1971 roku belgijski fizyk David Ruelle i holenderski matematyk Floris Takens opublikowali pracę o turbulencji, w której zaproponowali nazwę dla takich obiektów: dziwne atraktory. Ruelle i Takens badali tendencję dziwnych atraktorów do ściskania przestrzeni w jednym kierunku i rozciągania jej w innym. Zwykłe atraktory przypominają lep na muchy: przyciągają punkty reprezentujące stan układu. Dziwne atraktory robią coś więcej: mieszają przyciągnięte punkty.

Wkrótce - zarówno teoretycznie, jak i doświadczalnie znaleziono inne przykłady dziwnych atraktorów. Francuski astronom Michel Hénon odkrył rozciągający i składający przestrzeń algorytm, który ma dziwny atraktor. Podobnie jak w przypadku atraktora Lorenza, punkty na atraktorze Hénona skaczą po nim w trudny do przewidzenia sposób, a punkty w jego otoczeniu dążą do atraktora. Amerykańscy fizycy doświadczalni Harry Swinney i Jerry Gollub przeprowadzili pionierskie badania eksperymentalne dziwnych atraktorów w turbulentnym przepływie. Wkrótce nowe koncepcje przeniknęły do niemal wszystkich dziedzin - dziwne atraktory znaleziono w rytmie pracy serca i pierścieniach Saturna.

Te dziwne obiekty pojawiają się naprawdę w bardzo wielu sytuacjach, co znakomicie wykazał Robert Shaw, jeden z założycieli Dynamical Systems Collective. Shaw wybrał jeden z najprostszych układów: powoli cieknący kran. Mierzył stoperem czas między kolejnymi kroplami, a następnie sporządził wykres obrazujący odstęp czasu między dwiema kroplami w zależności od czasu między dwiema poprzednimi. Początkowo wydawało się, że punkty układają się zupełnie chaotycznie, ale wkrótce utworzyły dziwny atraktor.

Zbieg okoliczności sprawił, że w latach siedemdziesiątych równocześnie z odkryciem dynamiki układów chaotycznych nastąpił rozkwit matematyki nadającej się do opisu obiektów wykazujących samo-podobieństwo. W roku 1975 francuski matematyk Benoit Mandelbrot, który rozważał kwestie pomiarów geometrycznych, wprowadził termin fraktal na oznaczenie struktur odznaczających się podobieństwem we wszystkich skalach. Mandelbrot przyjął, że takie obiekty mają wymiar niecałkowity - zamiast jednego, dwóch lub trzech wymiarów, które tak dobrze znamy.

2.2 Czym jest "dziwny atraktor"?

Globalny atraktor intuicyjnie jest zbiorem, do którego zbliżają się asymptotycznie wszystkie trajektorie. Jedna z bardziej znanych i przyjętych definicji mówi, że dziwny atraktor, to taki, który posiada strukturę fraktala. Taki atraktor przejawia przy tym wszelkie oznaki chaosu.

Dziwne atraktory są pomostem łączącym chaos i fraktale. Jeżeli patrzymy na nie jako na struktury geometryczne, widzimy fraktale (związane jest to z wymiarem Hausdorffa atraktorów), jeżeli chcemy je analizować jako układy dynamiczne, to mamy do czynienia z chaosem (co z kolei wiąże się z wykładnikiem Lapunowa). W rzeczywistości trudno podać konkretną definicję matematyczną dziwnego atraktora.

2.3 Własności dziwnego atraktora – próba zdefiniowania tego obiektu

Niech $\tau\ (x, y, z)$ będzie danym przekształceniem w przestrzeń ze współrzędnymi x i y. Ograniczony podzbiór A tej płaszczyzny jest chaotycznym i dziwnym atraktorem dla przekształcenia τ , jeśli istnieje zbiór R spełniający następujące warunki:

- Atraktor:
  R jest otoczeniem A , tzn. dla każdego punktu (x, y) ze zbioru A istnieje mały dysk o środku w punkcie (x, y), który jest zawarty w R. To implikuje w szczególności, że A jest zawarty w R. R jest obszarem-pułapką, tzn. każda orbita startująca w R , pozostaje w R dla wszystkich iteracji. Co więcej, orbita staje się bliska A i zostaje tak blisko niego, jak tylko chcemy. Zatem A jest atraktorem.

- Wrażliwość:
  Orbity startujące w R wykazują czułą zależność od warunków początkowych. To czyni A atraktorem chaotycznym.
- Fraktal:
  Atraktor ma strukturę fraktala a zatem nazwiemy go dziwnym atraktorem.
- Mieszanie:
  A nie może zostać podzielony na dwa różne atraktory (Odnotujmy tu uwagę, że to nie implikuje, że atraktor musi być zbiorem spójnym). Istnieją punkty początkowe ze zbioru R z orbitami, które podchodzą dowolnie blisko do dowolnego punktu atraktora A.

3 Układ Lorenza

3.1 Obecna postać układu Lorenza

Obecnie układ Lorenza jest bardziej znany jako układ 3 nieliniowych równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

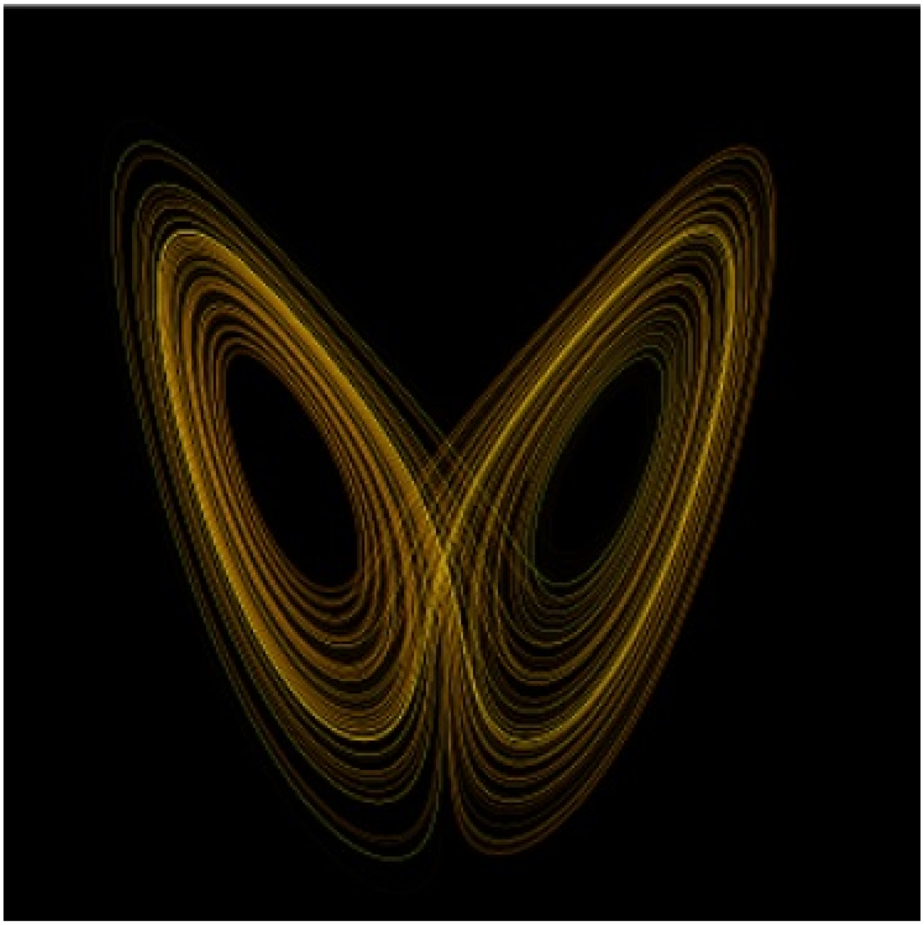
σ - stała Prandtla,

ρ - stała Rayleigha,

$\sigma, \beta, \rho > 0$

Jednakże zwykle podaje się:

$\sigma = 10,\ \beta = \frac{8}{3},\ \rho\ jest\ zmienne.$



Rysunek 1: Atraktor Lorenza dla $\rho = 28,\ \sigma = 10,\ \beta = \frac{8}{3}$

3.2 Zachowanie atraktora Lorenza

Z rysunku wiemy już jak wygląda ten atraktor. Widzimy tam dwie powierzchnie (skrzydła motyla), po których trajektorie poruszają się ruchem spiralnym na zewnątrz. Kiedy odległość od środka jednej spirali staje się większa niż pewien określony próg, rozwiązanie jest wyrzucane z tej spirali i przyciągane do drugiej, gdzie znowu zaczyna wędrować ruchem spiralnym na zewnątrz i tak dalej. Liczby takich spiralnych iteracji jakie orbita spędza w jednej spirali a później w drugiej, potraktowane jako ciąg liczbowy nie wykazują żadnej regularności (Ta własność zależy ściśle od wyboru trajektorii). Nawet przy wyborze dwóch bardzo bliskich punktów startu, albo nawet tego samego punktu startu, ale obliczenia wykonamy na dwóch komputerach, wówczas ciągi te różnią się między sobą od pewnego miejsca. Tu właśnie ujawnia się chaos i ogromna wrażliwość na warunki początkowe.

4 Podsumowanie

Dwa dowolne punkty położone bardzo blisko siebie na jednym skrzydle ewoluują dynamicznie w taki sposób, że wkrótce lądują na różnych skrzydłach. Natomiast punkty nienależące do skrzydeł w wyniku ewolucji układu zbliżają się do nich. Krótko mówiąc, odległości między sąsiednimi punktami należącymi do znalezionego zbioru rośnie, natomiast punkty nienależące do zbioru dążą do niego.

Badanie (deterministycznych) zjawisk chaotycznych jest jednym z najmodniejszych kierunków we współczesnych naukach przyrodniczych. Formułowane są opinie, że teoria chaosu,obok teorii względności i mechaniki kwantowej, jest trzecią wielką rewolucją naukową.

Układy chaotyczne są obliczeniowo nieredukowalne. Stan układu w dowolnej chwili w przyszłości można "przewidzieć" tylko jedną metodą: śledząc jego zachowanie krok po kroku. Układ chaotyczny jest najszybszym komputerem mogącym obliczyć swoją ewolucję

Z tych odkryć wynikają bardzo ważne wnioski dla ludzkiego przeznaczenia. Jeśli natura zachowuje się chaotycznie, to jest równocześnie deterministyczna i nieprzewidywalna. Jedyny sposób, by poznać przyszłość, polega na prześledzeniu całej historii układu, od chwili obecnej do danej chwili w przyszłości.

5 Podsumowanie

6 Źródła

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz$_{s}ystem$

[2] https://jakevdp.github.io/blog/2013/02/16/animating-the-lorentz-system-in-3d/

[3] https://github.com/gboeing/

[4] http://www-users.mat.umk.pl/ elodymek/