

Błądzenie przypadkowe (Random walk)

Miron Nowak

Marzec 2017

1 Random walk

Błądzenie losowe / błądzenie przypadkowe – pojęcie z zakresu matematyki i fizyki określające ruch losowy: w kolejnych chwilach czasu cząstka („chodziarz”) przemieszcza się z aktualnego położenia do innego, losowo wybranego. Błądzenie losowe jest przykładem prostego procesu stochastycznego.

Przykładami procesów, które można modelować za pomocą błądzenia losowego są: ruch molekuly w cieczy czy gazie, zmiany ceny wybranego towaru na giełdzie, zmiany finansów gracza w kasynie.

Błądzenie przypadkowe jest bardzo szeroko wykorzystywanym modelem, z pomocą którego jesteśmy w stanie opisać szereg procesów, nie tylko jednoznacznie kojarzących się z fizyką (np. ruchy Browna, zachowanie się cząsteczek substancji w rozpuszczalniku itp.), ale również zaskakująco odległych od tematyki, którą - jak zwykle się uważać - fizyka się zajmuje. Z pomocą modelu błądzenia przypadkowego opisuje się z powodzeniem chociażby problemy związane z ewolucją szeroko rozumianych populacji różnego rodzaju czy rozwojem epidemii.

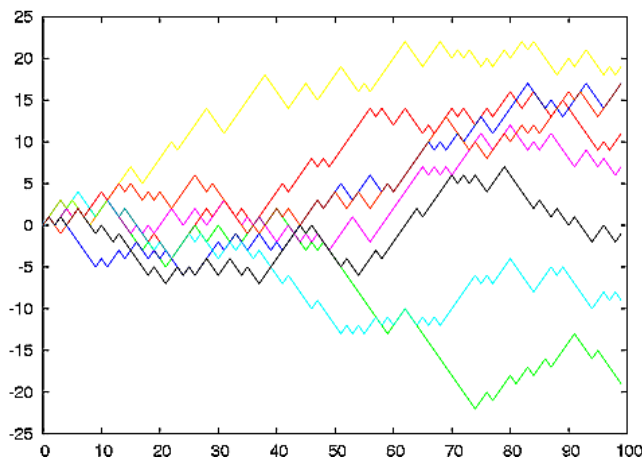
2 Klasyfikacja procesów błądzenia losowego

Procesy błądzenia losowego można klasyfikować na różne sposoby:

- procesy proste, będące łańcuchami Markova (prawdopodobieństwo wyboru kolejnego kroku nie zależy od historii ruchu) lub bardziej złożone procesy stochastyczne,
- procesy na siatkach dyskretnych (np. na siatkach regularnych na prostej, na płaszczyźnie, w przestrzeni, na grafach; w przestrzeniach zakrzywionych) oraz w przestrzeniach ciągłych,
- procesy zakładające dyskretny czas (zmiana położenia następuje w regularnych odstępach czasu) lub ciągły (zmiana położenia następuje w losowo wybranych odstępach czasu).

Średnia z kwadratów odległości, obliczona dla wielu cząstek startujących z tego samego punktu początkowego, po n krokach jest proporcjonalnie do \sqrt{n} i wynosi $l\sqrt{n}$, gdzie l - długość pojedynczego kroku.

3 Symulacja błędzenia na prostej



Wykres przedstawia wynik symulacji ruchu osiemnastu cząstek, błędzących losowo. Cząstki startują z tego samego punktu 0. W każdym kroku dana cząstka może skoczyć do góry lub w dół. Na osi poziomej odłożono numery kolejnych skoków.

Widać, że :a) średnie położenie cząstek po 100 krokach jest równe 0, b) średnia odległość od punktu 0 zwiększa się w miarę ruchu, ale wolniej niż liniowo.

Trajektorie błędzenia losowego o stałych krokach utworzone są z dyskretnych punktów: a). w błędzeniu po prostej punkty te leżą na prostej w równych odległościach od siebie b) dla dwóch wymiarów punkty dyskretne leżą na płaszczyźnie, c) dla trzech wymiarów punkty dyskretne leżą w przestrzeni.

4 Błędzenie przypadkowe - przypadek jednowymiarowy

Dobrze rozwiązaniem analitycznym modelem jest zdecydowanie błędzenie przypadkowe na prostej. Rozważamy bowiem skoczka, który może poruszać się po prostej rzeczywistej w lewo lub w prawo, wykonując każdorazowo skok o stałej długości a . Zakładamy, iż prawdopodobieństwo tego, iż skoczek przeskoczy w prawo względem jego aktualnej pozycji wynosi p , zaś w lewo $q = 1 - p$. Położenie skoczka na prostej względem arbitralnie wybranego punktu początkowego opisujemy z pomocą zmiennej losowej x . I tak, położenie skoczka po N skokach wyrażamy wzorem:

$$x = \sum_{i=1}^N \Delta x_i$$

gdzie $\Delta x_i = \pm a$ jest zmienną losową, określającą względną zmianę położenia skoczka podczas pojedynczego skoku.

1. Należy obliczyć analitycznie średnie położenie skoczka $\langle x \rangle$ po N skokach, przyjmując, iż prawdopodobieństwa skoku w prawo i w lewo są sobie równe. Jest to najprostszy przypadek błędzenia jednowymiarowego, ale, o ironio, niezwykle produktywny.

2. Powtórzyć obliczenia z punktu 1. tym razem przyjmując, iż p jest różne od q , co jest przypadkiem ogólniejszym. Postarać się zinterpretować otrzymany wynik i podać przykład (może być sformułowany trywialnie) sytuacji fizycznej, w której założenie o nieistnieniu równości między prawdopodobieństwami może mieć sens.

Literatura

- [1] Błądzenie losowe
<https://pl.wikipedia.org/wiki>
- [2] Ciekawe zadania - Błądzenie przypadkowe - przypadek jednowymiarowy
<http://fizyczny.net/>
- [3] Random walks in Python
<http://www.kaisataipale.net/blog>