Kwantowy oscylator harmoniczny

Miron Nowak

Oscylator harmoniczny – układ drgający, poddany działaniu sił sprężystych tj. sił proporcjonalnych do przemieszczenia **r** układu od położenia równowagi:

$$F(r) = -kr$$

gdzie k – tzw. stała sprężystości.

Energia potencjalna oscylatora zależy od kwadratu przemieszczenia **r** od położenia równowagi:

$$V(r) = \frac{k}{2} r^2$$

Oscylator harmoniczny

Energia potencjalna oscylatora zależy od kwadratu przemieszczenia **r** od położenia równowagi:

$$V(r) = \frac{k}{2}r^2$$

Energia potencjalna w tej postaci jest najprostszą postacią potencjału, która pojawia się w przypadku drgań układów. Inne potencjały to:

- potencjał stały **V(r)=const** dotyczy ruchu układu swobodnego, tj. nie poddanego działaniu żadnych sił zewnętrznych (np. cząstka swobodna; cząstka ta porusza się ze stałą prędkością w przestrzeni);
- potencjał liniowy **V(r)=cr**, gdzie c – stała liczba:

Klasyczny oscylator harmoniczny

Klasyczny oscylator harmoniczny – realizacja modelu oscylatora harmonicznego w ramach mechaniki klasycznej.
Klasyczny oscylator harmoniczny określa się jako układ w potencjale kwadratowym:

$$U = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

bądź równoważnie jako układ, w którym działa liniowa siła F proporcjonalna do wychylenia z przeciwnym zwrotem **x**

$$\vec{F} \sim -\vec{-x}$$

Jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym jest każdy układ fizyczny, którego zachowanie można opisać równaniem zwanym równaniem oscylatora harmonicznego:

$$a(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

ozwiązanie równania oscylatora harmonicznego można zapisać w jednej z poniższych równoważnych postaci:

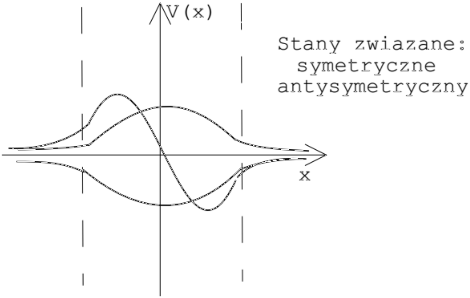
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$
$$x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$x(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi')$$
$$x(t) = Fe^{i\omega_0 t} + Ge^{-i\omega_0 t}$$

gdzie $A, B, C, \varphi, D, \varphi', F, G$ to stałe zależne od warunków początkowych. ω_0 jest częstością kołową oscylatora harmonicznego. Okres drgań **T** wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

natomiast częstotliwość drgań ν wynosi:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$



Istnieją tylko dwa klasyczne przykłady, które można skwantować otrzymując pełne rozwiązanie w sposób jawny. Jest to oscylator harmoniczny i potencjał kulombowski (atom wodoru).

Hamiltonian dla oscylatora kwantowego:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2.$$

Z działania hamiltonianu na funkcję $\hat{H}\psi_E = E\psi_E$ otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{k}{2}x^2\psi(x) = E\psi(x).$$

Wyrażenie na najniższą energie:

$$E = \frac{\hbar^2 \alpha}{2m}.$$

gdzie czynnik α wyraża się następująco:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(-\alpha^2 x^2 - \alpha) = \frac{k}{2} \Rightarrow \hbar^2 \alpha^2 = km \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{km}}{\hbar}.$$

Energia oscylatora kwantowego wyrażona za pomocą częstości drgań oscylatora klasycznego wynosi:

$$E = \frac{\hbar}{2}\omega_{kl}.$$

Cała klasa rozwiązań równania wyrażona jest następująco:

$$\psi_n(x) = W_n(x)e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}.$$

Wówczas dla:

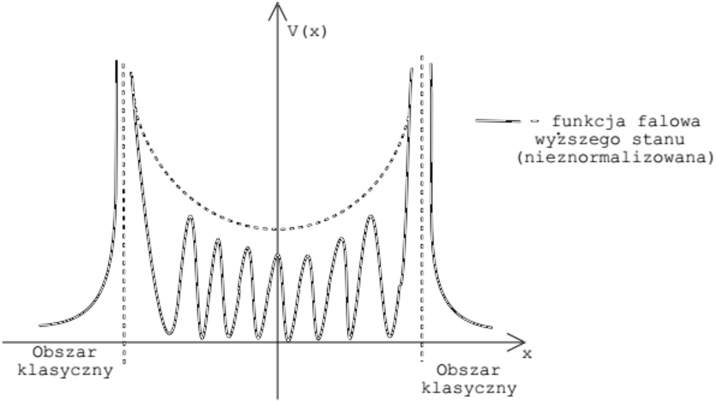
- n $= 0$: $\psi_0(x) = N_0 e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$ - stan podstawowy
- n $= 1$: $\psi_0(x) = N_1 x e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$ - stan podstawowy

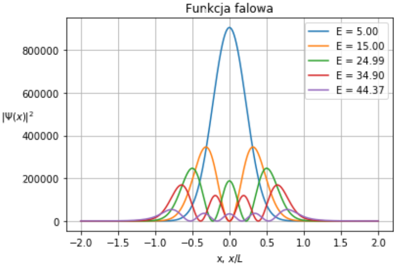
Klasyczne prawdopodobieństwo P(x) znalezienia cząstki w punkcie x jest proporcjonalne do odwrotności jej prędkości:

$$P(x) \sim \frac{1}{v(x)} = \frac{m}{p(x)} = \frac{m}{\sqrt{2m(E - V(x))}}$$

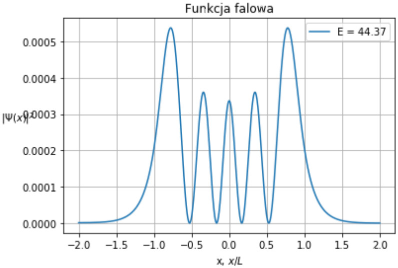
Kwantowy oscylator harmoniczny

Kwantowomechaniczne prawdopodobieństwo uśrednia się do klasycznego rozkładu prawdopodobieństwa:





Funkcje falowe



Powiększenie ostatniej funkcji falowej

Dziękuję za uwagę!