

# Model Isinga

Karolina Banasiewicz, Eryk Kozłowski, Mahdi Maurycy El  
Khourani, Magdalena Oćwieja

Grudzień, 2016

# Jednowymiarowy model Isinga

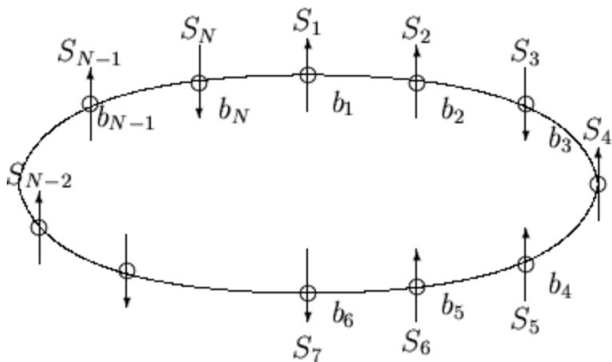
Liniowy łańcuch  $N$  spinów mogących przyjmować wartości  $\pm\frac{1}{2}\hbar$ .  
Mikrostanem układu jest zbiór zmiennych

$$\sigma_i = \pm 1, \text{ gdzie } i=1,2,\dots,N \quad (1)$$

Określają one czy  $i$  – ty spin jest skierowany w górę, czy w dół.  
Zazwyczaj zakłada się periodyczne warunki brzegowe.

# Jednowymiarowy model Isinga

Postać geometryczna



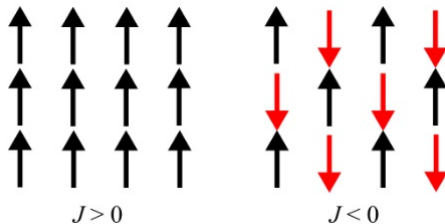
Rysunek: Jednowymiarowy model Isinga

# Dwuwymiarowy model Isinga

Dwuwymiarowy model fero- i antyferromagnetyka zdefiniowany jest na sieci  $L \times L$ . Z każdym węzłem związany jest spin  $s_i$ , przyjmujący wartości  $+1$  („do góry”) lub  $-1$  („w dół”). Oddziaływanie pomiędzy spinami zachodzi poprzez sprzężenie wymiany  $J$ . Dodatkowo uwzględnić można istnienie zewnętrznego pola magnetycznego  $H$ . Hamiltonian takiego układu ma postać:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i \quad (2)$$

# Dwuwymiarowy model Isinga



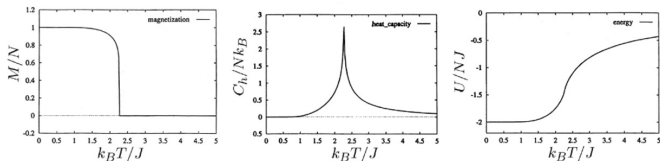
Rysunek: ułożenie spinów

# Dwuwymiarowy model Isinga

Model Isinga rozwiązany w dwóch wymiarach wykazuje obecność przejścia fazowego. Jego temperatura wynosi:

$$\frac{k_B T_C}{J} = \frac{2}{\ln(\sqrt{2} + 1)} \approx 2.269 \quad (3)$$

Rozwiązanie to pozwala wyliczyć nie tylko temperaturę krytyczną, ale między innymi temperaturową zależność magnetyzacji ( $M$ ), ciepła właściwego ( $C$ ) czy energii  $U$ . Poniższe wykresy przedstawiają właśnie te wielkości.



**Rysunek:** temperaturowa zależności: magnetyzacja ( $M$ ), ciepło właściwe ( $C$ ), energii  $U$

Idea symulacji Monte Carlo dla modelu Isinga polega na wygenerowaniu odpowiedniego zespołu stanów układu spinów i wykonaniu pomiarów na elementach tego zespołu. Ponieważ dla  $N$ -węzłowego modelu Isinga możliwych jest  $2^N$  konfiguracji spinów, w większości przypadków niemożliwe jest wygenerowanie wszystkich możliwych stanów i trzeba ograniczyć się do reprezentatywnej próby, w której stany występują odpowiednimi prawdopodobieństwami.

# Algorytm Metropolisia

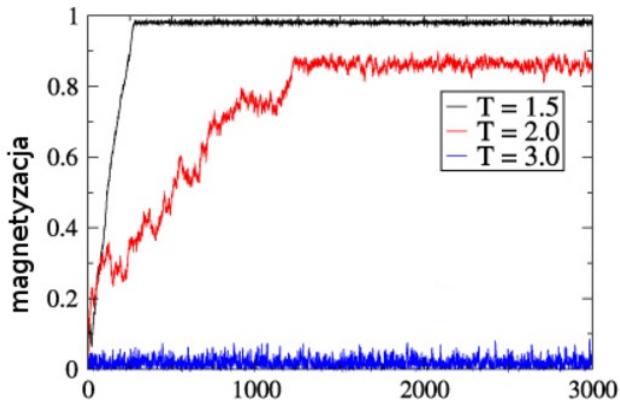
Zespół zawierający stany z odpowiednim prawdopodobieństwem można wygenerować bez obliczania sumy statystycznej. Posłużyć się można algorytmem Metropolisia:

- 1 Ustalamy temperaturę  $T$  oraz pole magnetyczne  $h$ .
- 2 Generujemy stan początkowy (np. z losowo skierowanymi spinami, albo wszystkimi spinami ustawionymi tak samo).
- 3 Obliczamy energię układu  $E_1$ , wybieramy jeden z węzłów układu i obracamy w nim spin.
- 4 Wyliczamy nową energię  $E_2$  i różnicę energii  $\Delta E = E_2 - E_1$ .
- 5 Jeśli  $\Delta E \leq 0$  akceptujemy nową konfigurację (dołączamy ją do zespołu).
- 6 Jeśli  $\Delta E > 0$  generujemy losową liczbę  $r$  o rozkładzie jednorodnym pomiędzy 0 i 1.
- 7 Jeśli  $\exp(\Delta E/k_B T) \geq r$  akceptujemy nową konfigurację; w przeciwnym wypadku spin obrócony jest w punkcie 4
- 8 Powracamy do punktu 4.



# Algorytm Metropolis

Punkty od 4 do 8 tworzą tzw. krok Monte Carlo.



Rysunek: krok Monte Carlo