Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki w Krakowie

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Fizyka Techniczna

Juliusz Chojenka, Paula Świerska, Wojciech Tejchman

Kontrola chaosu metodą Ott-Yorke-Grebogi

Kraków 2016

Celem zadania było zapoznanie się z pojęciami chaosu i równaniem logistycznym oraz zrozumienie i wykorzystanie metody kontroli chaosu metodą Ott-Yorke-Grebogi.

1. Chaos

Chaos deterministyczny – własność równań lub układów równań, polegająca na dużej wrażliwości rozwiązań na dowolnie małe zaburzenie parametrów. Dotyczy to zwykle nieliniowych równań różniczkowych i różnicowych, opisujących układy dynamiczne.

Efekt motyla – niewielkie zaburzenie warunków początkowych powoduje rosnące wykładniczo z czasem zmiany w zachowaniu układu.

1.1. Przykład chaosu – równanie logistyczne

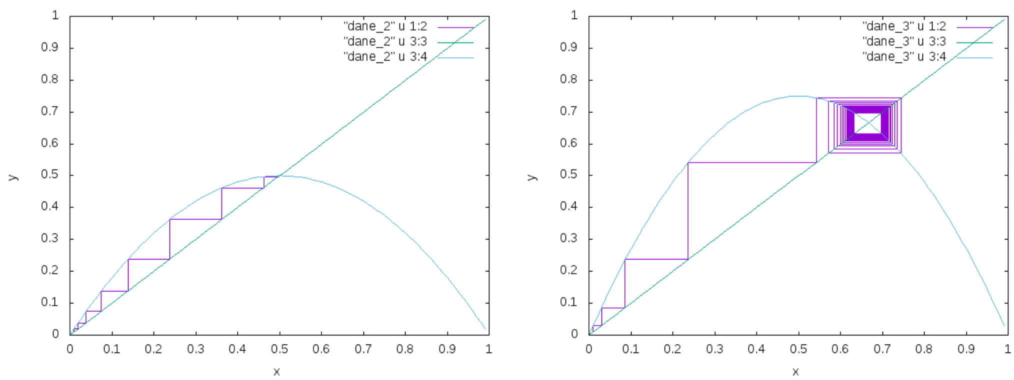
Funkcja ta jest klasycznym przykładem prostego układu dynamicznego zachowującego się chaotycznie.

$$f : [0,1] \to [0,1] \quad x \to rx(1-x) \quad 0 < r < 4$$
$$\text{Niech } x_0 \varepsilon (0,1) \quad x_n = f(x_{n-1}),$$

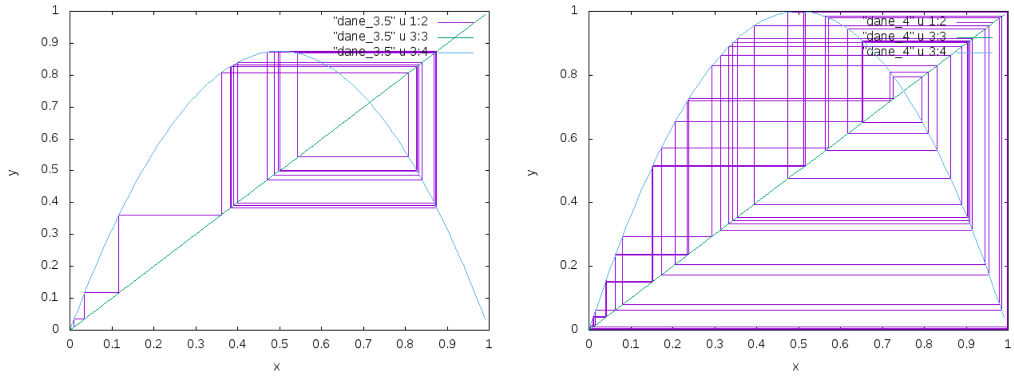
Ogólny charakter ciągu nie ma związku z wartością początkową, ale zależy od wartości parametru r.
Dla $r < 1$ x_n jest ciągiem malejącym i zbieżnym do zera. Wartość 0 "przyciąga" kolejne wyrazy ciągu, jest więc (jednopunktowym) atraktorem przekształcenia.
Dla $r = 1$ nadal każdy ciąg iteracji przekształcenia logistycznego jest malejący (i zbieżny do zera), ale zmienia się charakter tej zbieżności – stosunek kolejnych wyrazów ciągu dąży do jedności.
Dla $1 < r <= 2$ 0 z atraktora zmienia się w repeler – zamiast "przyciągać" do siebie kolejne wartości, "odpycha" je. W sąsiedztwie zera ciąg iteracji staje się rosnący. Nowym atraktorem jest $x = 1 - \frac{1}{k}$.
Dla $2 < r <= 3$ ciągi przestają być monotoniczne. Atraktorem dalej jest $x = 1 - \frac{1}{r}$.
Dla $r > 3$ pojawiają się dwa nowe punkty przyciągania – $\frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}$. Rozdwojenie to nosi nazwę bifurkacji.

Wygenerowaliśmy dane (x i y) dla funkcji kwadratowej f(x) i funkcji liniowej y=x. Następnie fioletową linią połączyliśmy kolejne punkty:
— (x_0, y_0)
— $(x_0, f(x_0))$
— $(f(x_0), f(x_0))$
— $(f(x_0), f(f(x_0))$
— $\quad\ldots$

Rysunki 1 i 2 Przedstawiają funkcję kwadratową, liniową oraz połączone punkty, dla różnych wartości r (patrz opis równania logistycznego). Jak widać z rysunków zachowanie charakterystyczne dla chaosu zaczyna się już dla r=3 (rysunek 1, prawy) i jest większe wraz ze wzrostem r. Największe dla r=4 (rysunek 2, prawy):



Rysunek 1: Równanie logistyczne dla różnych wartości parametru r. **Lewy:** r=2. **Prawy** r=2,5.

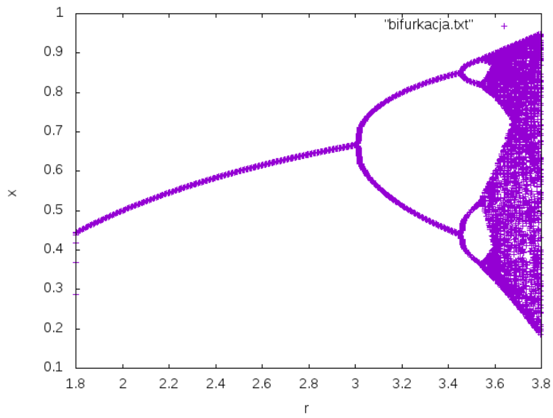


Rysunek 2: Równanie logistyczne dla różnych wartości parametru r. **Lewy:** r=3,5. **Prawy** r=4.

1.2. Bifurkacja

Bifurkacja – zjawisko skokowej zmiany własności modelu matematycznego przy drobnej zmianie jego parametrów.

Rysunek 3 przedstawia wartości zmiennej x w zależności od zmiany parametru r. Można łatwo odczytać, że dla r¡3 równanie nie przedstawia własności chaotycznych, po tej wartości zmienna x może przyjmuje dwie różne wartości. Przy r=3,4 przyjmuje cztery, natomiast przy około 3,5 jest już całkowicie chaotyczne.



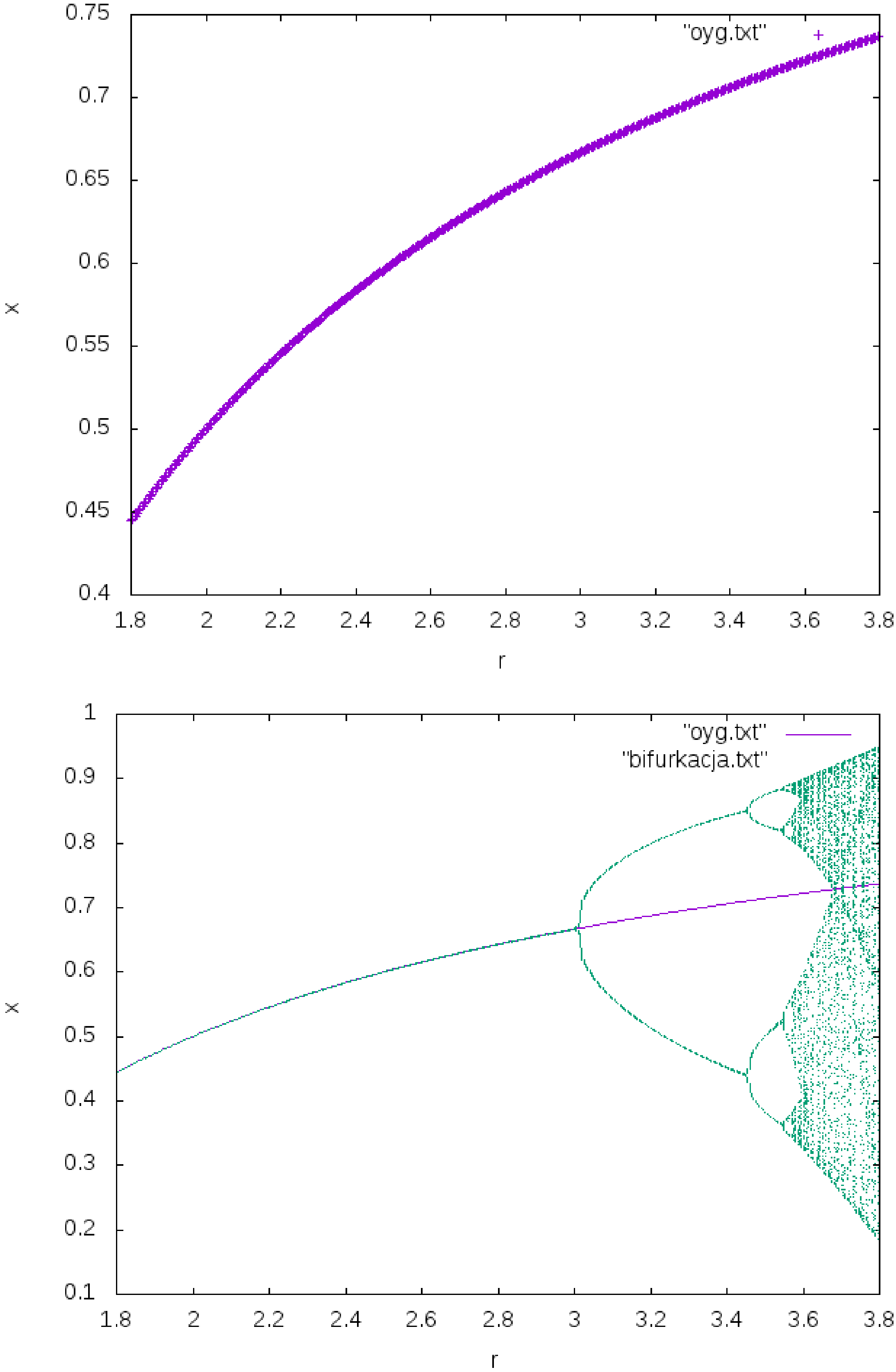
Rysunek 3: **Bifurkacja:** na osi OX znajduje się parametr r, na osi OY wartość współrzędnej x.

2. Metoda Ott-Yorke-Grebogi

Wykorzystuje ona to, że: w stanie chaotycznym układu istnieje nieskończenie wiele niestabilnych trajektorii periodycznych.

Na początku, zasięgamy informacji o zdezorganizowanym systemie przez analizowanie plastra chaotycznego atraktora. Ten plaster jest pierwszą rekurencyjną mapą. Po tym jak informacje o sekcji zostały zebrane, pozwala się systemowi na bieg i czeka do czasu gdy to zbliży się do upragnionej okresowej orbity w sekcji. Następnie, system pozostaje na tej orbicie. Gdy parametr kontrolny jest zmieniony, chaotyczny atraktor jest przesunięty i zniekształcony. Jeśli wszystko odbywa się zgodnie z planem, nowy atraktor zachęca system by kontynuować na trajektorii.

Na rysunku 4 znajduje się metoda OYG dla bifurkacji (górny wykres). Dla porównania dodaliśmy wykres (rysunek 4 dół) pokazujący bifurkację przed (zielone punkty) oraz po zastosowaniu metody OYG (fioletowa linia). Jak widać metoda ta zadziałała bardzo dobrze i w rezultacie byliśmy w stanie otrzymać funkcję dla tylko z jedną wartością x.



Rysunek 4: Zastosowanie metody OYG dla bifurkacji.