Pole wektorowe

Ewelina Adamus
Magdalena Gwarda
Szymon Kociuba

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki w Krakowie

8 lutego 2017

Plan prezentacji

Wektor będziemy interpretować jako operator różniczkowy pierwszego rzędu, działający na funkcje określoną na M. Jeżeli mamy jakąś parametryzację, to można stosować ją do reprezentowania wektorów stycznych do przestrzeni M (tzn. operatorów różniczkowych na M) jako kombinacji liniowych operatorów (wektorów) postaci $\frac{\partial}{\tau^i}$ bez konieczności „wychodzenia" poza M i interpretowania tych wektorów jako „strzałek" w większej przestrzeni A^n.

Możemy zatem myśleć abstrakcyjnie o M jako o rozmaitości różniczkowalnej. Pod tą nazwą będziemy rozumieli parę (M,A), gdzie M jest zbiorem punktów zaś A jest atlasem zupełnym, tzn. zbiorem lokalnych parametryzacji. Terminem tym oznaczamy odwracalne odwzorowanie typu:

$$\mathbb{R}^n \supset U \ni (x^k) \to \kappa(x^k) = x \in O \supset M, \tag{1}$$

dla którego dziedzina U jest zbiorem otwartym. Zupełność atlasu A oznacza, że obrazy tych parametryzacji pokrywają cały zbiór M: każdy punkty $x \in$ M leży w obrazie im(κ) jakiejś parametryzacji κ

$$x \in im(\kappa) = O. \tag{2}$$

Konstrukcję **wiązki stycznej** którą będziemy się posługiwać można wytłumaczyć następująco - dla każdej parametryzacji (1) na M zdeniujemy parametryzację na TM następującym wzorem:

$$\mathbb{R}^{2n} \supset U \times \mathbb{R}^n \ni (x^k, v^l) \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa_T(x^k, v^l) = v_x := x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in O_T = \bigcup_{x \in O} T_x M \subset TM(3)$$

pierwsze n współrzędnych parametryzuje punkt zaczepienia, zaś pozostałe n wyróżnia konkretny wektor w przestrzeni stycznej $T_x M$. Ponieważ wzory transformacyjne na składowe wektora przy przejściu do innej mapy zawierają już pierwsze pochodne funkcji przejścia dla samych współrzędnych, prawa transformacyjne w tak skonstruowanym atlasie A_T są jeden raz mniej różniczkowalne niż oryginalne prawa transformacyjne w oryginalnym atlasie A.

Pole wektorowe to kolekcja wektorów: po jednym w każdym punkcie rozmaitości. Jeśli zatem zastosować je do funkcji f, to otrzymamy kolekcję wartości, po jednej w każdym punkcie,czyli nową funkcję. Można wobec tego podać następującą definicję pola wektorowego:

Definicja

Pole wektorowe jest to operator różniczkowy, ciągły

$$X : C^1_{loc} \longrightarrow C_{loc} \tag{4}$$

Spełniające warunki:

$$1. \quad X(af + bg) = aX(f) + bX(g),$$
$$2. \quad \mathrm{X(fg) = fX(g) + gX(f).}$$

Zastosowaliśmy tutaj zastrzeżenie „loc” w oznaczeniu zbioru funkcji, aby podkreślić lokalny charakter tych obiektów: funkcje nie muszą być określone na całej rozmaitości M a jedynie lokalnie, na otoczeniu punktu, który nas interesuje. W takich przestrzeniach rozważamy topologię zbieżności niemal jednostajnej w C_{loc} i niemal jednostajnej wraz z pochodnymi pierwszego rzędu w C^1_{loc} Jeśli X jest polem wektorowym, to jego wartość X (x) w punkcie x M, dana wzorem

$$(X(x))(f) := (X(f))(x) \tag{5}$$

Jest także wektorem zaczepionym w punkcie x:

$$(X(x)) \in T_x M \tag{6}$$

gdzie zbiór $T_x M$ jest przestrzenią styczną do rozmaitości M w punkcie x $\in$ M. Jeśli wybierzemy dowolną mapę (τ^i) w otoczeniu x, to operatory $\frac{\partial}{\tau^i}$ stanowią bazę przestrzeni $T_x M$. Oznacza to, że każdy wektor jest kombinacją powyższych.

Wobec tego powyższą definicję pola wektorowego można zapisać bardziej lokalnie, jako odwzorowanie różniczkowalne z rozmaitości M w rozmaitość TM:

$$M \supset O \ni x \to X(x) \in TM \tag{7}$$

jednak z zastrzeżeniem, że wartość tego odwzorowania w punkcie x musi być wektorem zaczepionym w tym samym punkcie. Różniczkowalność odwzorowania sprawdza się w układach współrzędnych. Jeśli zatem wybrać w M mapę daną przez (1) oraz odpowiadającą jej mapę w TM daną przez (3), to „konkretyzacja" odwzorowania X w tych mapach wygląda następująco:

$$\mathbb{R}^n \supset U \ni (x^k) \to (x^k, X^l(x^k)) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{8}$$

Lokalnie, w układzie współrzędnych, całą informację o polu wektorowym niesie n funkcji X^l których wartość koduje wartość współrzędnych wektora

$$X(x) = X^l(x)\frac{\partial}{\partial x^l}$$

w zależności od współrzędnych punktu zaczepienia x.

Pole jest gładkie klasy C^s jeśli te funkcje są takiej klasy. I znów ma to sens jedynie dla $s \leqslant$ l-1 , bowiem nawet gdyby w jednej mapie s było większe, to po transformacji do innej mapy nie ma szans na utrzymanie tak wysokiego stopnia gładkości, skoro prawa transformacyjne są jedynie (l-1) razy różniczkowalne.

Można zatem patrzeć na pole wektorowe, jako na odwzorowanie gładkie:

$$X : M \to TM \tag{9}$$

z bazy M wiązki stycznej w samą przestrzeń wiązki TM i takie, że wartość X(x) tego odwzorowania w punkcie x należy do włókna T_xM wiązki. Ten ostatni warunek oznacza, że rzut τ czyni z X odwzorowanie tożsamościowe:

$$\tau \circ X = id \tag{10}$$

Gładkie odwzorowanie z bazy wiązki w jej przestrzeń, spełniające ten warunek nazywa się cięciem wiązki. A zatem pole wektorowe, to po prostu **cięcie wiązki stycznej**.

Przykłady pól wektorowych

Przykładami pól wektorowych znanymi z fizyki są:

- pole grawitacyjne - pole wektorów natężenia pola grawitacyjnego
- pole elektryczne - pole wektorów natężenia pola elektrycznego
- pole magnetyczne - pole wektorów indukcji magnetycznej
- pole prędkości i potencjał zespolony przepływu – określa prędkość przepływu płynu w każdym punkcie przestrzeni

Dywergencja

Dywergencja pola wektorowego to operator różniczkowy przyporządkowujący trójwymiarowemu polu wektorowemu pole skalarne będące formalnym iloczynem skalarnym operatora nabla z polem. Operator dywergencji pojawia się w sposób naturalny w kontekście całkowania form zewnętrznych w przestrzeni trójwymiarowej, a więc ma szereg konkretnych interpretacji fizycznych, związanych np. z mechaniką płynów.

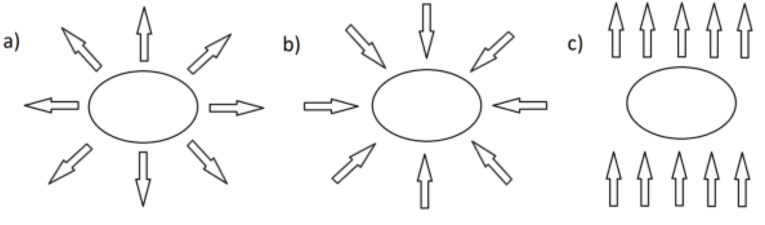
We współrzędnych kartezjańskich dywergencję możemy zdefiniować następująco:

Definicja

Dla różniczkowalnego pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_x)$ dywergencja równa jest funkcji skalarnej:

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Zwróćmy uwagę na zapis dywergencji za pomocą operatora nabla, jest ona iloczynem skalarnym tego operatora z wektorem składowych pola wektorowego.



Rysunek: a) dywergencja jest dodatnia (masa ucieka z układu), b) dywergencja jest ujemna (masa wpływa do układu), c) dywergencja jest równa 0 (tyle samo masy wpływa i wypływa z układu)

Rotacja jest operatorem wektorowym opisującym nieskończenie małą rotację trójwymiarowego pola wektorowego. W każdym punkcie przestrzeni pole rotacji opisywane jest przez wektor, którego kierunek i długość opisują wirowość pola w danym punkcie.

We współrzędnych kartezjańskich rotację różniczkowalnego pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_x)$ definiujemy jako pole wektorowe o postaci:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Można zauważyć, że rotacja jest de facto iloczynem wektorowym operatora nabla i pola wektorowego. Jeśli rotacja pola jest zerowa, mówimy o polu bezwirowym. Bezwirowość pola jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym jego potencjalności (pole potencjalne to takie, w którym praca nie zależy od drogi tylko od położenia punktów przed i po przesunięciu, np. pole grawitacyjne).

Bibliografia I

Jerzy Kijowski
Geometria różniczkowa jako narzędzie nauk przyrodniczych
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, Warszawa 2013.

Andrzej Trautman
Grupy oraz ich reprezentacje z zastosowaniami w fizyce
Instytut Fizyki Teoretycznej Uniwersytet Warszawski, Warszawa 2011.