Rozmaitości różniczkowalne

na przykładzie mechaniki klasycznej

Jagoda Wójcik, Maciej Borowiec, Jacek Pabis

Politechnika Krakowska, Instytut Fizyki

7 lutego 2017r.

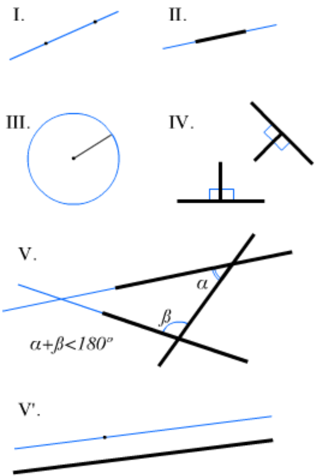
Geometria euklidesowa

Jest to klasyczna odmiana geometrii opisana po raz pierwszy przez Euklidesa w dziele Elementy (z IV w. p.n.e.). Zebrał on całą ówczesną wiedzę matematyczną znaną Grekom, dziś jego dzieło przedstawia się jako pierwszą znaną aksjomatyzację w historii matematyki.
W ujęciu tradycyjnym, nazywanym geometrią syntetyczną, geometria euklidesowa przedstawiana jest jako system aksjomatyczny, w którym wszystkie twierdzenia muszą wynikać z aksjomatów, czyli zdań przyjmowanych z góry jako prawdziwe.

Aksjomaty Euklidesa

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Przez dany punkt nienależący do danej prostej można poprowadzić jedną prostą rozłączną z daną prostą (postulat równoległości, tzw. *Postulat Euklidesa*

Aksjomaty Euklidesa



Przestrzeń euklidesowa

Przestrzeń euklidesowa – przestrzeń opisywana przez geometrię euklidesową. Model ten stanowi dobre przybliżenie przestrzeni fizycznej, jeśli za jej pomocą opisuje się odległości makroskopowe. Nie nadaje się do opisu przestrzeni fizycznej w odległościach bardzo małych (atomowych), gdy rolę zaczynają odgrywać efekty kwantowe lub w pobliżu masywnych obiektów astronomicznych (np. Słońce, czarne dziury) - gdy rolę zaczynają grać efekty zakrzywienia przestrzeni i geometria staje się nieeuklidesowa. Jednowymiarową przestrzeń euklidesową nazywa się prostą euklidesową, a dwuwymiarową – płaszczyzną euklidesową.

Przestrzeń euklidesowa

Kluczową własnością przestrzeni euklidesowych jest ich „płaskość”. W geometrii wyróżnia się inne przestrzenie, które nie są euklidesowe. Np. *sfera* jest *przestrzenią nieeuklidesową*, gdyż kąty trójkąta na sferze sumują się do wartości większej niż 180 stopni, inaczej niż na płaszczyźnie euklidesowej.
Geometria rozważa przestrzenie wielowymiarowe. Dla danej liczby naturalnej **n** istnieje dokładnie jedna przestrzeń euklidesowa o wymiarze n, zaś przestrzeni *nieeuklidesowych* wymiaru **n** jest *nieskończenie wiele*. Te ostatnie można konstruować np. poprzez deformację przestrzeni euklidesowej.

Współczesna definicja przestrzeni euklidesowaej

Definiuje się jako dwuwymiarową rzeczywistą przestrzeń afiniczną uzupełnioną o iloczyn skalarny. W takim ujęciu płaszczyzna euklidesowa jest traktowana jako zbiór punktów, których wzajemnie zależności da się wyrazić jedynie za pomocą pojęć odległości i kąta. Opisanie płaszczyzny euklidesowej w ten sposób sprawia, że rozszerzenie geometrii na dowolne wymiary jest stosunkowo proste.

Dzisiejsza matematyka umożliwia łatwe uogólnienie pojęć odległości i kąta na cztero-, pięcio-, a nawet więcej wymiarowe przestrzenie (nazywane **hiperprzestrzeniami**).

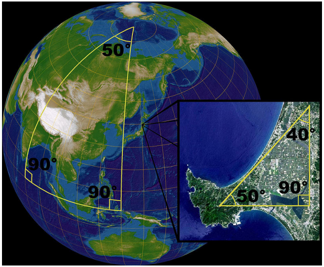
Definicja przestrzeni euklidesowej wymiaru n

Niech dana będzie przestrzeń liniowa V wymiaru n nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, w której określony jest standardowy iloczyn skalarny (nazwany euklidesowym). Przestrzeń afiniczną *(E,V)* nazywa się wówczas przestrzenią euklidesową wymiaru n.

Co to jest rozmaitość?

Rozmaitość

Jest to zbiór (ściślej: przestrzeń topologiczna), który ma lokalnie własności zbioru $\mathbb{R}^n$ (przestrzeni euklidesowej). Oznacza to, że każdy punkt n-wymiarowej rozmaitości ma otoczenie, które jest homeomorficzne ze zbiorem $\mathbb{R}^n$.
Jednowymiarowe rozmaitości zawierają krzywe, np. okręgi, elipsy, parabole itp.



Definicja

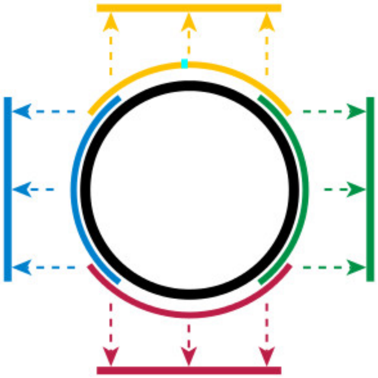
Na zbiorze M jest określona *struktura rozmaitości różniczkowalnej*, jeśli M jest zaopatrzony w skończony lub przeliczanlny zbiór map tak, że każdy punkt z M jest przedstawiony na co najmniej jednej mapie.

Definicja

Mapą nazywamy obszar U w euklidesowej przestrzeni współrzędnych q $= (q_1, ..., q_n)$ wraz z wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem ϕ na pewien podzbiór M, ϕ: U$\rightarrow$ ϕ U $\subset$ M.

Definicja

Każda z czterech map odwzorowuje fragment okręgu do otwartego przedziału i razem obejmują cały okrąg.



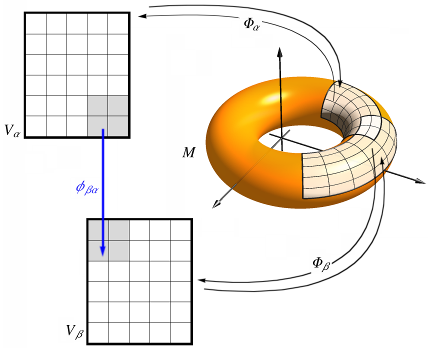
Mapy rozmaitość

Jeśli pewien punkt z M jest przedstawiony na dwóch mapach U, U', to jest tak również dla pewnych otoczeń V, V' tego punktu na każdej z map. Pojawia się w ten sposób odwzorowanie $\phi^{-1}\psi$:V$\rightarrow$ V' części jednej mapy V $\subset$ U na innej mapy V' $\subset$ U'.

Jest to odwzororwanie obszaru V euklidesowej przestrzeni współrzędnych **q** na obszar V' euklidesowej przestrzeni współrzędnych **q'** i jest ono zadane przez układ n funkcji n zmiennych $\mathbf{q'} = \mathbf{q'(q)}$ $(\mathbf{q} = \mathbf{q(q'))}$. Mapy U, U' nazywamy *zgodnymi*, jeśli funkcje te są różniczkowalne ([1]).

Czym jest atlas?

Atlasem nazywamy zbiór wzajemnie zgodnych map. Dwa atlasy są *równoważne*, jeśli ich suma mnogościowa znowu jest atlasem.



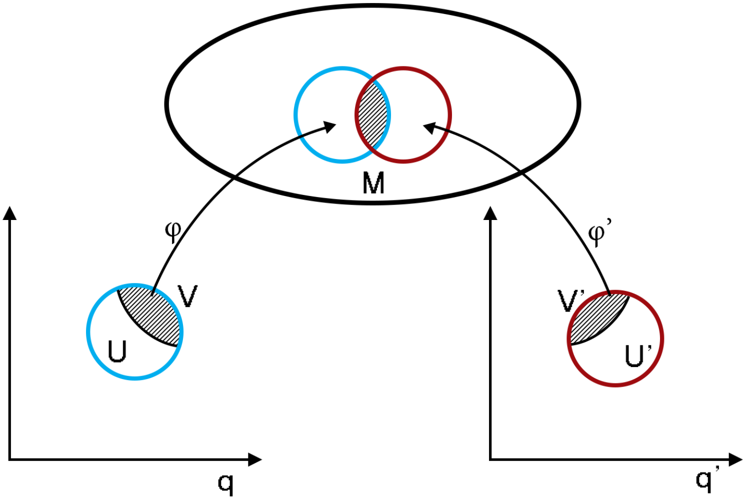
Co to jest rozmaitość różniczkowalna?

Rozmaitość różniczkowalna jest klasą równoważności atlasów. Będziemy rozważali jedynie rozmaitości *spójne* ([2]). Wtedy liczba n jest jedna i ta sama dla wszystkich map. Nazywamy ją wymiarem rozmaitości.

Co to jest rozmaitość różniczkowalna?

Otoczeniem punktu rozmaitości nazywamy obraz przy przekształceniu ϕ: U$\rightarrow$ M otoczenia przedstawienia tego punktu na mapie U. Będziemy zakładali, że każde dwa różne punkty rozmaitości mają nie przecinające się otoczenia.

Co to jest rozmaitość różniczkowalna?

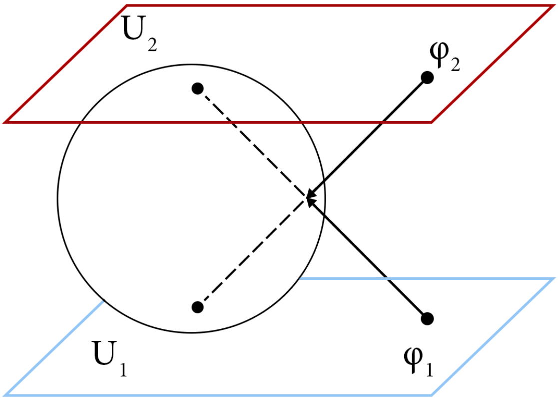


Przykład rozmaitości

Sfera S^2 = {(x,y,z): $x^2 + y^2 + z^2$=1} ma strukturę rozmaitości, której atlas tworzą, na przykład, dwie mapy (U_i, ϕ_i, i=1, 2) zadane przez rzuty stereograficzne(rys. 2). Analogiczna konstrukcja daje się zastosować do sfery n-wymiarowej

$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) : \sum x_i^2 = 1\}$$

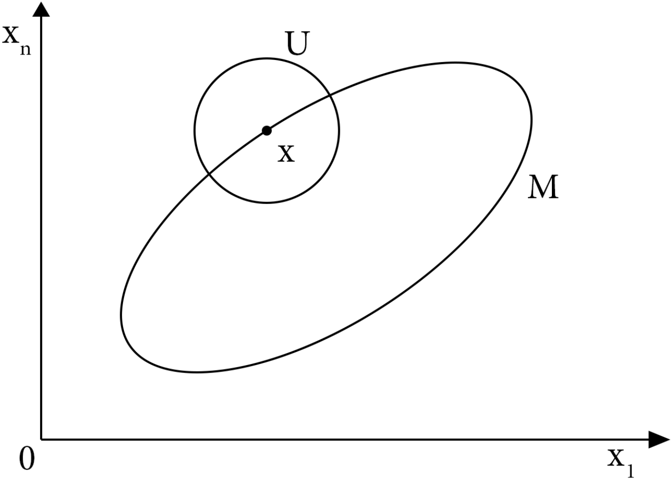
Przykład rozmaitości



Rozmaitość zanurzona

Mówimy, że M jest podrozmaitością k -wymiarową zanurzoną w przestrzeni euklidesowej E^n, jeśli w otoczeniu każdego punktu $x \in M$ istnieje układ n - k funkcji f_1: U $\rightarrow$ **R**, ..., f_{n-k}: U$\rightarrow$ **R** takich, że przecięcie otoczenia U ze zbiorem M opisane jest równaniami $f_1 = 0$, ...,$f_{n-k} = 0$, a wektory **grad** f_1, ..., **grad** f_{n-k} są w punkcjie x liniowo niezależne.

Rozmaitość zanurzona



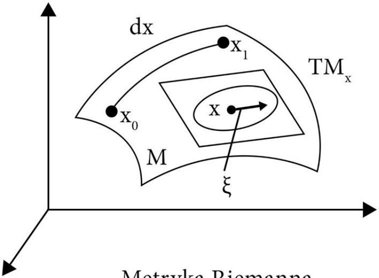
Definicja:

Jeśli M jest rozmaitością zanurzoną w przestrzeni euklidesowej, to metryka przestrzeni euklidesowej pozwala mierzyć na M długość łuków, kąty między wektorami, objętość itp. Wszystkie te wielkości można wyrazić przez długości wektorów stycznych, czyli przez dodatnio określoną formę kwadratową, zadaną na kazdej przestrzeni stycznej TM_x

$$TM_x \to \mathbb{R} \qquad \xi \to <\xi, \xi> .$$

Definicja:

Rozmaitość różniczkowalną, z ustaloną dodatnio okresloną formą kwadratową $<\xi, \xi>$ w każdej przestrzeni stycznej TM_x, nazywamy *rozmaitością Riemanna*, a samą tę formę kwadratową nazywamy *metryką Riemanna*.



Metryka Riemanna

Dziękujemy za uwagę

Bibliografia:

- W.I. Anold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*
- J. Gancarzewicz, *Zarys współczesnej geometrii różniczkowej*
- http://www.wikipedia.pl