Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Mahdi Maurycy El Khourani
Eryk Kozłecki
Daniel Szura

Luty 2017

1 Grawitacja jako geometria (Einstein 1908-1915)

Podstawowym założeniem szczególnej teorii względności jest, że każdy obserwator inercjalny (tzn. poruszający się bez przyspieszenia) zmierzy taką samą prędkość świała c, niezależnie od jego własnej prędkości. Załóżmy, że promień świetlny jest emitowany w chwili $t = 0$ w punkcie przestrzeni o współrzędnych $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i rejestrowany w chwili t w punkcie (x, y, z). Warunek stałości c oznacza, że dla każdego obserwatora inercjalnego będzie spełnione równanie

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{1.1}$$

Hermann Minkowski zauważył w roku 1908, że transformacje między inercjalnymi układami odniesienia, zachowujące równanie $s^2 = 0$ (nazywane dziś tansformacjami Lorentza),zachowują też wartość wyrażenia s^2. Uderzyło go podobieństwo tej własności s^2 do pewnego faktu z geometrii euklidesowej. W geometrii Euklidesa odległość między punktami o współrzędnych $(0, 0, 0)$ i (x, y, z) wyraża się wzorem

$$L^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1.2}$$

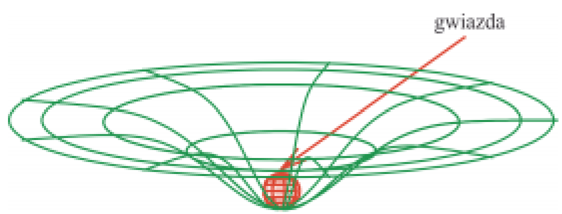
i jest zachowywana przez transformacje obrotu, które, tak jak transformacje Lorentza, są liniowe w x, y i z. Z podobieństwa wzorów (1.1) i (1.2) Minkowski wywnioskował, że szczególna teoria względności jest geometrią przestrzeni, którą dziś nazywamy czasoprzestrzenią Minkowskiego. Einstein stwierdził już wcześniej, że pole grawitacyjne można symulować za pomocą ruchu przyspieszonego obserwatora. Transformacje zachowujące postać wyrażenia (1.1), nazywanego formą metryczną, są, jak już wspomniano, liniowe w zmiennych (t, x, y, z). Przy transformacji do układu poruszającego się z przyspieszeniem nowe zmienne (t', x', y', z') są dowolnymi funkcjami starych (t, x, y, z). Po takiej transformacji współczynniki formy (1.1) nie są już stałe. Przykład: po transformacji $x = x' + (t')^2$ wyrażenie s^2 zmieni się następująco:

$$(s')^2 = (c^2 - t'^2)(t')^2 - 2(t')^2x' - (x')^2 - y^2 - z^2. \tag{1.3}$$

Jeśli przyspieszenie imituje grawitację, to pole grawitacyjne powinno ujawniać się tak samo – w czasoprzestrzeni z polem grawitacyjnym, współczynniki przy kwadratach i iloczynach t, x, y i z powinny być funkcjami współrzędnych. Różnica między prawdziwym polem grawitacyjnym a polem symulowanym w czasoprzestrzeni Minkowskiego przez przyspieszenie jest taka, że pole symulowane można usunąć przez transformację zmiennych z powrotem do układu inercjalnego, podczas gdy w rzeczywistym polu grawitacyjnym globalny układ inercjalny nie istnieje: prawdziwego pola grawitacyjnego nie da się wyeliminować przez transformację zmiennych. Twórca podstaw takiej geometrii, Bernhard Riemann, przedstawił je w wykładzie habilitacyjnym w roku 1854. Jego pomysł polegał na tym, żeby wzór Pitagorasa (1.2) zastąpić symetryczną formą kwadratową w przestrzeni n-wymiarowej

$$
\begin{aligned}
(ds)^2 = g_{11}(x_1, ..., x_n)(dx_1)^2 + 2g_{12}(x_1, ..., x_n)dx_1dx_2 + ... \\
+g_{nn}(x_1, .., x_n)(dx_n)^2, \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

której współczynniki są funkcjami współrzędnych. Wielkość ds jest odległością między punktami o współrzędnych $(x1, x2, ..., xn)$ i $(x1 + dx1, x2 + dx2, ..., xn + dxn)$. Pomysł zinterpretowania grawitacji jako modyfikacji geometrii czasoprzestrzenimusiał być uzupełniony równaniami uogólniającymi prawa grawitacji Newtona. W równaniach Einsteina wyrażenia różniczkowe II rzędu zbudowane z dziesięciu wielkości g i j są przyrównane do zera – gdy szukamy rozwiązań w próżni; lub do 10 składowych tensora energii-pędu, które przedstawiają gęstość energii i rozkład ciśnień/naprężeń w źródle. W granicy newtonowskiej, $c \to \infty$, jedno z tych równań przechodzi w równanie Poissona, pozostałe są spełnione tożsamościowo (obie strony dążą do zera). Geometryczny sens różnicy między czasoprzestrzenią Minkowskiego a czasoprzestrzenią z polem grawitacyjnym jest taki, że ta pierwsza jest płaska, zaś ta druga ma niezerową krzywiznę. Czasoprzestrzeń ulega zakrzywieniu w sąsiedztwie masywnych ciał (np. gwiazd), a jej krzywiznę postrzegamy jako pole grawitacyjne. Czasoprzestrzeń z polem grawitacyjnym można więc wyobrażać sobie tak, jak na rysunku 1.



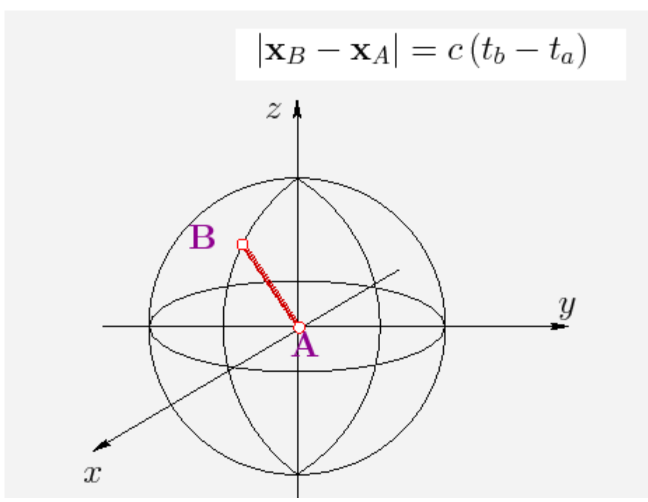
Czasoprzestrzeń ulega zakrzywieniu w sąsiedztwie mas (np. gwiazd)

2 Czasoprzestrzeń Minkowskiego - ujęcie matematyczne

U podstaw szczególnej teorii względności legła zasada, której wiarygodność nie została podważona żadnym z dotychczasowych doświadczeń. Jej treść zawarta jest w następującym postulacie: Światło w próżni rozchodzi się we wszystkich układach odniesienia, z tą samą prędkością $c = 299792458m/s$. Wielkość tę uważamy za uniwersalną stałą przyrody. Ten postulat, chociaż zrodzony z ducha zasady względności Galileusza, pozostaje z nią w jawnej sprzeczności. Wyjście z tej trudnej sytuacji jest możliwe, gdy uświadomimy sobie, że prawa transformacyjne

$$t^{'} = \lambda t + s \ ,$$
$$x^{'} = ut + Cx + a,$$

mają zastosowanie tylko wtedy, gdy prędkości zachodzących zdarzeń są dużo mniejsze od prędkości światła $(u«c)$; Wówczas możemy przekształcić prędkość ciała $\mathbf{v}$, według nierelatywistycznej formuły $\mathbf{v}^{'}$ $=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, w której $\mathbf{u}$ oznacza wzajemną prędkość układów inercjalnych. Aby przybliżyć ten punkt widzenia, wyobraźmy sobie taką sytuację. W inercjalnym układzie Σ wyemitowany jest w punkcie $\mathbf{x}_A$ sygnał świetlny w chwili t_A . Gdy dzieje się to w próżni, sygnał ten rozchodzi się izotropowo z tą samą prędkością c . Dlatego front fali tego zaburzenia jest sferą o środku $\mathbf{x}_A$



Izotropowy sygnał świetlny

Jeśli ten sygnał rejestrujemy w chwili późniejszej $t_B > t_A$, wtedy promień tej sfery wynosi,$|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A| = c(t_B - t_A)$. Podnosząc strony tej równości do kwadratu otrzymamy,

$$c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)^2 = 0. \qquad (2.1.1.a)$$

Równość (2.1.1a) wiąże między sobą dwa zdarzenia świetlne reprezentowane w czasoprzestrzeni przez punkty $(t_A, \mathbf{x}_A)$ i $(t_B, \mathbf{x}_B)$. Opuśćmy teraz inercjalny układ Σ i przejdźmy do innego układu inercjalnego $\Sigma^{'}$, poruszającego się z prędkością $\mathbf{w}$. Zgodnie z postulatem o absolutnej prędkości światła, te same zdarzenia świetlne w obu układach będą postrzegane identycznie. Dlatego równość (2.1.1a) będzie również spełniona w układzie $\Sigma^{'}$,

$$c^2(t^{'}_B - t^{'}_A)^2 - (\mathbf{x}^{'}_B - \mathbf{x}^{'}_A)^2 = 0. \qquad (2.1.1b)$$

Matematycznie oznacza to, że współrzędne czasoprzestrzenne $(t,\mathbf{x})$ każdego zdarzenia, które są 4 liczbami rzeczywistymi otrzymanymi z pomiaru, należy zastąpić nowymi liczbami $(t^{'}, \mathbf{x}^{'})$ w taki sposób, by były zgodne znowu z wynikami pomiaru przeprowadzonego w nowym układzie. Popatrzmy się najpierw, co wynika w tym względzie z teorii Galileusza. Otrzymaliśmy reguły transformacyjne, postulując spełnienie warunku (2.1.1), które okazały się translacjami czasoprzestrzennymi, oraz obrotami przestrzennymi:

$$t^{'} = t + s$$

$$x^{'} = x + a$$

$$x^{'} = Cx$$

Jeśli skorzystalibyśmy z tych przepisów galileuszowskich, łączących układy inercjalne formułami,

$$t^{'} = t$$

$$x^{'} = wt + x$$

po podstawieniu do relacji (2.1.1), otrzymamy

$$c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = c^2(t^{'}_B - t^{'}_A)^2 - (x^{'}_B - x^{'}_A)^2 = 0,$$

skąd natychmiast wnioskujemy, że w układzie $\Sigma^{'}$ czoło fali ulegnie asferycznej deformacji. Odpowiedzi na pytanie, jak uogólnić przekształcenie Galileusza, by gwarantowało zachowanie warunku, udzielił Lorentz w 1903 roku. Rok później, Poincare udowodnił, że takie przekształcenia tworzą grupę względem której równania Maxwella są niezmiennicze. W 1905 roku Einstein przyjął, że ta niezmienniczość ma charakter uniwersalny, co stało się podstawą szczególnej teorii względności. Przystępując do dedukcji transformacji Lorentza, będziemy stosować się do powszechnej konwencji dotyczącej oznaczeń współrzędnych tensorów występujących w formalizmie relatywistycznym. I tak, przyjęło się oznaczać czterowektory czasoprzestrzenne, w zapisie zwyczajowo zwanym kontrawariantnym, jako

$x^{\mu} \equiv (ct,\mathbf{x}) \equiv (x^0,\mathbf{x})\,, \quad (\mu = 0,1,2,3) \qquad (2.1.2a)$

lub w zapisie kowariantnym jako

$x_{\mu} \equiv (ct,-\mathbf{x}) \equiv (x_0,-\mathbf{x})\,, \quad (\mu = 0,1,2,3). \qquad (2.1.2b)$

Wskaźniki greckie $(\alpha, \beta, \ldots, \mu\delta, \ldots)$ stosuje się na określenie czterech składowych $(0, 1, 2, 3)$ czasoprzestrzennych. Pod wskaźnikami łacińskimi $(i, j, k, \ldots)$ zwykle rozumiemy trzy składowe przestrzenne $(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$. Przejście od postaci kontrawariantej do kowariantnej można wykonać podnosząc (lub, obniżając) wskaźnik mnożąc składowe wektora (ogólniej, tensora) przez tensor metryczny $g^{\mu\nu}$ (lub $g_{\mu\nu}$) o postaci

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.1.3)$$

Stosujemy domyślną konwencję sumacyjną. Na przykład, zapisujemy iloczyn wektora kontrawariantnego z wektorem kowariantnym w następujący sposób

$$\sum_{\alpha=0}^{3} a_{\alpha} b^{\alpha} = a_{\alpha} b^{\alpha}. \qquad (2.1.4)$$

.

Konwencja ta pozwala nam zapisać ponadto

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}, \qquad (2.1.5a)$$

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}, \qquad (2.1.5b)$$

a sam warunek jako (2.1.1)

$$(x^{\mu}_B - x^{\mu}_A) g_{\mu\nu} (x^{\nu}_B - x^{\nu}_A) = 0$$

(2.1.6)

Kontynuując poszukiwania uogólnionych transformacji, Λ^{μ}_{ν} , zapiszmy ją najpierw w postaci,

$$x^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \qquad (2.1.7)$$

a następnie skorzystamy z równości,

$$(x^{'\mu}_B - x^{'\mu}_A) g_{\mu\nu} (x^{'\nu}_B - x^{'\nu}_A) = (x^{\alpha}_B - x^{\alpha}_A) \Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} (x^{\beta}_B - x^{\beta}_A) = (x^{\mu}_B - x^{\mu}_A) g_{\mu\nu} (x^{\nu}_B - x^{\nu}_A) = 0$$

(2.1.8)

co pozwala nam wnioskować, że poszukiwane transformacje Lorentza Λ są tymi przekształceniami, względem których czasoprzestrzenny tensor metryczny g jest niezmienniczy, tzn.

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \qquad (2.1.9)$$

W zapisie macierzowym, ten warunek będzie wyglądał następująco,

$$\Lambda^T g \Lambda = g \qquad (2.2.0)$$

Poszukujemy przekształceń kanonicznych i stwierdzamy, że zachowują one geometrię symplektyczną opisaną antysymetrycznym tensorem I (teoria przestrzeni fazowych).
Bliższą analogię znajdziemy w geometrii euklidesowej, w której odległość

$$dl^2 = dx^i g_{ik} dx^k = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (2.3.0)$$

zadana jest jednostkowym tensorem metrycznym,

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.4.0)$$

Powyższy warunek niezmienniczości formy kwadratowej, prowadzi do transformacji ortogonalnych, które w języku potocznie rozumianej geometrii są obrotami, tworzącymi podgrupę C grupy Galileusza. Powracając do naszej czterowymiarowej czasoprzestrzeni, wyposażymy ją w odległość między zdarzeniami, zdefiniowaną poniższą równością

$$ds^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \equiv (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (2.4.1a)$$

lub w postaci skończonej

$$s^2(B, A) \equiv (x_B^\mu - x_A^\mu) g_{\mu\nu} (x_B^\nu - x_A^\nu). \qquad (2.4.1b)$$

Czasoprzestrzeń z tak zdefiniowaną metryką, staje się płaską rozmaitością różniczkową Minkowskiego M^4 . W tej rozmaitości, możemy wypowiedzieć postulat o relatywistycznej względności, o znacznie mocniejszej wymowie:

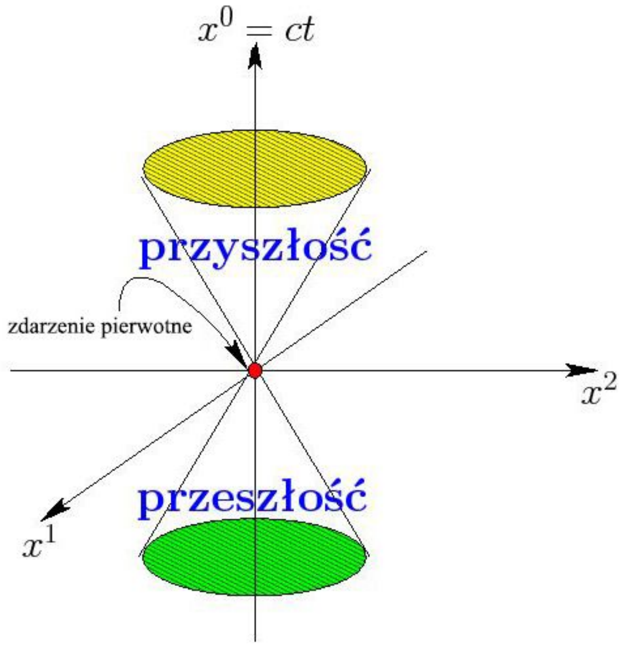
Prawa natury są niezmiennicze względem grupy przekształceń (Λ, a) Poincare'go, zachowujących w czasoprzestrzeni odległość zadaną płaskim tensorem metrycznym Minkowskiego

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.5.0)$$

W czasoprzestrzeni Minkowskiego wszystkie wektory, w zależności od ich normy, można poukładać w trzy rozłączne klasy:

$$x^2 = x^\mu x_\mu = \begin{cases} > 0, wektoryczasowe \\ = 0, wektoryzerowe \\ < 0, wektoryprzestrzenne \end{cases}$$

Ten podział jest niezależny od wyboru układu współrzędnych, dlatego ma charakter geometryczny. I tak, jeśli dwa zdarzenia połączone są wektorem czasowym, tzn. $x^2 > 0$, to istnieje taki układ odniesienia, w którym obydwa te zdarzenia mają takie same współrzędne przestrzenne (dzieją się w tym samym miejscu). Dalej, jeśli dwa zdarzenia połączone wektorem przestrzennym, tzn $x^2 < 0$, to istnieje taki układ odniesienia, w którym obydwa ta zdarzenia mają takie samą współrzędną czasową (zachodzą równocześnie). Jeśli pewne zdarzenie wybierzemy jako punkt odniesienia, wtedy wszystkie zdarzenia połączone z tym punktem wektorem zerowym tworzą stożek świetlny. Stożek ten dzieli czasoprzestrzeń M na trzy rozłączne obszary. Na powierzchni stożka leżą zdarzenia, które mogą być zarejestrowane za pomocą sygnałów świetlnych.



Stożek świetlny w czasoprzestrzeni Minkowskiego

Obszar czasoprzestrzeni poza stożkiem świetlnym składa się z tych wszystkich zdarzeń, których odległość od zdarzenia pierwotnego jest typu przestrzennego. W każdym układzie odniesienia dowolny punkt z tego obszaru znajduje się w innym miejscu (ma różne współrzędne przestrzenne) niż zdarzenie pierwotne. Dlatego obszar ten przyjęło się określać “ gdzie indziej”. Ponieważ nie można przekroczyć prędkości światła w świecie realnym, dlatego takie zdarzenia z obszaru “gdzie indziej” nie są związane przyczynowo ze zdarzeniem pierwotnym. Nie można ich także uporządkować czasowo. Istnieją takie układy odniesienia, w których zdarzenia “gdzie indziej” zachodzą bądź przed zdarzeniem pierwotnym, lub po nim. Istnieje też taki jeden układ, w którym te dwa zdarzenia zachodzą równocześnie.

Literatura

[1] Bruno Martelli
An Introduction to Geometric Topology.

[2] Algebra czasoprzestrzeni
http://arkadiusz-jadczyk.eu/docs/Szczegolna$_{t}eoria_{w}zglednosci_{C}z2.pdf$

[3] Model czasoprzestrzeni Minkowskiego
http://skap.neostrada.pl/Mechanika/mechanika/node51.html

[4] Andrzej Krasiński
Sto lat ogólnej teorii względności