Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Eryk Kozłecki Mahdi El Khourani Daniel Szura

Podstawowym założeniem szczególnej teorii względności jest fakt, że każdy obserwator inercjalny (tzn. poruszający się bez przyspieszenia) zmierzy taką samą prędkość światła c, niezależnie od jego własnej prędkości. Załóżmy, że promień świetlny jest emitowany w chwili $t = 0$ w punkcie przestrzeni o współrzędnych $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i rejestrowany w chwili t w punkcie (x, y, z). Warunek stałości c oznacza, że dla każdego obserwatora inercjalnego będzie spełnione równanie:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Hermann Minkowski zauważył w roku 1908, że transformacje między inercjalnymi układami odniesienia, zachowujące równanie $s^2 = 0$ (nazywane dziś tansformacjami Lorentza), zachowują też wartość wyrażenia s^2. Uderzyło go podobieństwo tej własności s^2 do pewnego faktu z geometrii euklidesowej. W geometrii Euklidesa odległość między punktami o współrzędnych $(0, 0, 0)$ i (x, y, z) wyraża się wzorem

$$L^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

i jest zachowywana przez transformacje obrotu, które, tak jak transformacje Lorentza, są liniowe w x, y i z. Z podobieństwa tych wzorów Minkowski wywnioskował, że szczególna teoria względności jest geometrią przestrzeni, którą dziś nazywamy czasoprzestrzenią Minkowskiego.

Minkowski doszedł do wniosku, że idee Einsteina oparte na wcześniejszych pracach Lorentza i Poincarégo dadzą się łatwiej przedstawić, jeśli czas i przestrzeń potraktować jako wymiary pewnej przestrzeni czterowymiarowej, a nie osobne i niezwiązane ze sobą wielkości. Można przyjąć, że to właśnie Minkowskiemu zawdzięczamy interpretację czasu jako czwartego wymiaru i istnienie terminu czasoprzestrzeni.

Ważnym wkładem Minkowskiego do fizyki matematycznej jest postulat niezmienniczości praw fizyki względem grupy przekształceń Lorentza, który wykorzystał przy wyprowadzeniu równań pola elektromagnetycznego.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego
Ujęcie matematyczne

U podstaw szczególnej teorii względności legła zasada, której wiarygodność nie została podważona żadnym z dotychczasowych doświadczeń. Jej treść zawarta jest w następującym postulacie: Światło w próżni rozchodzi się we wszystkich układach odniesienia, z tą samą prędkością $c = 299792458 m/s$. Wielkość tę uważamy za uniwersalną stałą przyrody. Ten postulat, chociaż zrodzony z ducha zasady względności Galileusza, pozostaje z nią w jawnej sprzeczności. Wyjście z tej trudnej sytuacji jest możliwe, gdy uświadomimy sobie, że prawa transformacyjne

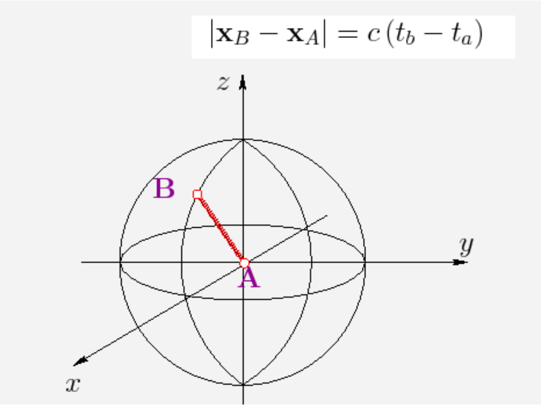
$$t^{'} = \lambda t + s \ ,$$

$$x^{'} = ut + Cx + a,$$

mają zastosowanie tylko wtedy, gdy prędkości zachodzących zdarzeń są dużo mniejsze od prędkości światła $(u << c)$

Ujęcie matematyczne

Wówczas możemy przekształcić prędkość ciała **v** , według nierelatywistycznej formuły $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, w której **u** oznacza wzajemną prędkość układów inercjalnych.



Izotropowy sygnał świetlny inercjalnym układzie Σ

Ujęcie matematyczne

Jeśli ten sygnał rejestrujemy w chwili późniejszej $t_B > t_A$, wtedy promień tej sfery wynosi,$|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A| = c(t_B - t_A)$. Podnosząc strony tej równości do kwadratu otrzymamy,

$$c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)^2 = 0.$$

Równość ta wiąże między sobą dwa zdarzenia świetlne reprezentowane w czasoprzestrzeni przez punkty $(t_A, \mathbf{x}_A)$ i $(t_B, \mathbf{x}_B)$.

Ujęcie matematyczne

Opuśćmy teraz inercjalny układ Σ i przejdźmy do innego układu inercjalnego $\Sigma^{'}$, poruszającego się z prędkością $\mathbf{w}$. Zgodnie z postulatem o absolutnej prędkości światła, te same zdarzenia świetlne w obu układach będą postrzegane identycznie. Dlatego poprzednia równość będzie również spełniona w układzie $\Sigma^{'}$,

$$c^2(t_B^{'} - t_A^{'})^2 - (\mathbf{x}_B^{'} - \mathbf{x}_A^{'})^2 = 0.$$

Matematycznie oznacza to, że współrzędne czasoprzestrzenne $(t,\mathbf{x})$ każdego zdarzenia, które są 4 liczbami rzeczywistymi otrzymanymi z pomiaru, należy zastąpić nowymi liczbami $(t^{'}, \mathbf{x}^{'})$

Ujęcie matematyczne

Z teorii Galileusza: Otrzymaliśmy reguły transformacyjne, które okazały się translacjami czasoprzestrzennymi, oraz obrotami przestrzennymi:

$$t^{'} = t + s$$

$$x^{'} = x + a$$

$$x^{'} = Cx$$

Jeśli skorzystalibyśmy z tych przepisów galileuszowskich, łączących układy inercjalne formułami,

$$t^{'} = t$$

$$x^{'} = wt + x$$

po podstawieniu do wcześniejszej relacji, otrzymamy

$$c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = c^2(t^{'}_B - t^{'}_A)^2 - (x^{'}_B - x^{'}_A)^2 = 0,$$

Przystępując do dedukcji transformacji Lorentza, będziemy stosować się do powszechnej konwencji dotyczącej oznaczeń współrzędnych tensorów występujących w formalizmie relatywistycznym. I tak, przyjęło się oznaczać czterowektory czasoprzestrzenne, w zapisie zwyczajowo zwanym kontrawariantnym jako

$x^\mu \equiv (ct,\mathbf{x}) \equiv (x^0,\mathbf{x})\ , \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$

lub w zapisie kowariantnym jako

$x_\mu \equiv (ct, -\mathbf{x}) \equiv (x_0, -\mathbf{x})\ , \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$

Wskaźniki greckie $(\alpha, \beta, \ldots, \mu\delta, \ldots)$ stosuje się na określenie czterech składowych $(0, 1, 2, 3)$ czasoprzestrzennych.
Pod wskaźnikami łacińskimi $(i, j, k, \ldots)$ zwykle rozumiemy trzy składowe przestrzenne $(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$.
Przejście od postaci kontrawariantej do kowariantnej można wykonać podnosząc (lub, obniżając) wskaźnik mnożąc składowe wektora (ogólniej, tensora) przez tensor metryczny $g^{\mu\nu}$ (lub $g_{\mu\nu}$) o postaci

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ujęcie matematyczne

Jak uogólnić transformacje Galileusza?

Stosujemy domyślną konwencję sumacyjną. Na przykład, zapisujemy iloczyn wektora kontrawariantnego z wektorem kowariantnym w następujący sposób

$$\sum_{\alpha=0}^{3} a_\alpha b^\alpha = a_\alpha b^\alpha .$$

.

Konwencja ta pozwala nam zapisać ponadto

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu ,$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu ,$$

a sam warunek jako

$$(x_B^\mu - x_A^\mu) g_{\mu\nu} (x_B^\nu - x_A^\nu) = 0$$

Kontynuując poszukiwania uogólnionych transformacji, Λ^{μ}_{ν} , zapiszmy ją najpierw w postaci,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},$$

a następnie skorzystamy z równości,

$$(x'^{\mu}_B - x'^{\mu}_A) g_{\mu\nu} (x'^{\nu}_B - x'^{\nu}_A) =$$
$$= (x^{\alpha}_B - x^{\alpha}_A) \Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} (x^{\beta}_B - x^{\beta}_A) =$$
$$= (x^{\mu}_B - x^{\mu}_A) g_{\mu\nu} (x^{\nu}_B - x^{\nu}_A) = 0$$

co pozwala nam wnioskować, że poszukiwane transformacje Lorentza Λ są tymi przekształceniami, względem których czasoprzestrzenny tensor metryczny g jest niezmienniczy, tzn.

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

W zapisie macierzowym, ten warunek będzie wyglądał następująco,

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

Poszukujemy przekształceń kanonicznych - zachowują one geometrię symplektyczną opisaną antysymetrycznym tensorem I (teoria przestrzeni fazowych).
Bliższą analogię znajdziemy w geometrii euklidesowej, w której odległość

$$dl^2 = dx^i g_{ik} dx^k = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

zadana jest jednostkowym tensorem metrycznym,

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ten warunek niezmienniczości formy kwadratowej, prowadzi do transformacji ortogonalnych, które w języku potocznie rozumianej geometrii są obrotami, tworzącymi podgrupę C grupy Galileusza. Powracając do naszej czterowymiarowej czasoprzestrzeni, wyposażymy ją w odległość między zdarzeniami, zdefiniowaną poniższą równością

$$ds^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \equiv (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

lub w postaci skończonej

$$s^2(B, A) \equiv (x^\mu_B - x^\mu_A) g_{\mu\nu} (x^\nu_B - x^\nu_A).$$

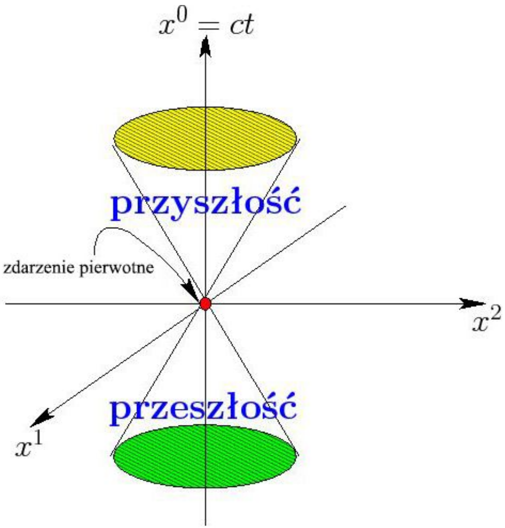
Czasoprzestrzeń z tak zdefiniowaną metryką, staje się płaską rozmaitością różniczkową Minkowskiego $\mathbb{M}^4$. W tej rozmaitości, możemy wypowiedzieć postulat o relatywistycznej względności, o znacznie mocniejszej wymowie: Prawa natury są niezmiennicze względem grupy przekształceń (Λ, a) Poincare'go, zachowujących w czasoprzestrzeni odległość zadaną płaskim tensorem metrycznym Minkowskiego

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

W czasoprzestrzeni Minkowskiego wszystkie wektory, w zależności od ich normy, można poukładać w trzy rozłączne klasy:

$$x^2 = x^\mu x_\mu = \begin{cases} > 0, \textit{wektoryczasowe} \\ = 0, \textit{wektoryzerowe} \\ < 0, \textit{wektoryprzestrzenne} \end{cases}$$

Czasoprzestrzeń Minkowskiego



Stożek świetlny w czasoprzestrzeni Minkowskiego

Dziękujemy za uwagę!