Geometria Riemanna
Wstęp

Mateusz Hofman,Paulina Drąg

7 lutego 2017

Struktura euklidesowa w przestrzeni afinicznej

Całą klasyczną geometrię można sprowadzić do struktury euklidesowej. Przestrzeń afiniczna (A,V,+), w której Euklides uprawiał geometrię jest wyposażona w dodatkowe działanie - iloczyn skalarny wektorów z przestrzeni wektorowej V.

Umiejąc mierzyć długości wszystkich wektorów potrafimy obliczyć iloczyn skalarny ich dowolnej pary:

$(v + w|v + w) - (v - w|v - w) = 4(v|w)$

Można również zapisać jako:

$(v|w) = (1/4)(||v + w||^2 - ||v - w||^2)(1)$

Zauważmy, że następująca funkcja zmiennej rzeczywistej "t"jest nieujemna:
$0 \leq (v + tw|v + tw) = (v|v) + 2t(v|w) + t^2(w|w)$
$\Delta = 4(v|w)^2 - 4||v||^2 * ||w||^2 \leq 0$

Nierówność Schwarza:

$$|(v|w)| \leq ||v||w||$$

$$-1 \leq \frac{(v|w)}{||v||||w||} \leq 1$$

Środkowy ułamek przyjmuje artości $[-1, 1]$, więc jest zawsze cosinusem jakiegoś kąta z odcinka $[0, \pi]$

$cos(/alpha(v,)) = \frac{(v|w)}{||v||||w||}$

Można to zapisać jeszcze inaczej:
$(v|w) = ||v||||w||cos(\alpha(v, w))$

Rozpisując kwadrat długości sumy jako:

$$(v+w|v+w) = ||v^2|| + ||w||^2 + 2(v|w)$$

Można zapisać (1) jako:
$$||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2||v||||w||cos(\alpha(v,w))$$

Wzorzec - kostka jednostkowa

$(e_i|e_j) = \delta_{ij}$

Zachodzi następujące prawo transformacji:

$(v_l|v_m) = (v_l^i e_i|v_m^j e_j) = v_l^i(e_i|e_j)v_m^j$

Iloczyn skalarny wektora bywa dodatni, ale bywa też ujemny. Stanowi to podstawę klasyfikacji wektorów na "przestrzenne"i ćzasowe".

$(u|u) = 0$ - wektory świetlne. Promienie świetlne w czasoprzestrzeni to właśnie linie, dla których wektor styczny jest zerowy.

Tensor metryczny jest nieodwracalny ($defg \neq 0$).

Z twierdzenia o bezwładności formy kwadratowej wynika, że każdą formę kwadratową można doprowadzić do postaci diagonalnej, gdzie na diagonali mogą pojawić się jedynki, minus jedynki lub zera.

Rozmaitość Riemanna to przestrzeń w której umiemy mierzyć długości wektorów stycznych. Nie musi być ona przestrzenią euklidesową, tzn. nie musi dopuszczać istnienia kartezjańskich układów współrzędnych. Dlatego też struktura iloczynu skalarnego musi być określona niezależnie w każdym jej punkcie.

Rozmaitość M nosi na sobie strukturę Riemanna (metryczną) oznaczoną "g"każdym jej punkcie $x \in M$ przestrzeń styczna $T_x M$ jest przestrzenią euklidesową, to znaczy jest dla mniej określony iloczyn skalarny $(x|x)_g$ w taki sposób, że gdy X i Y są gładkimi polami wektorowymi to ich iloczyn skalarny tzn. funkcja

$$x \in M \to (X(x)|Y(x))_g = (Y(x)|X(x))_g$$

jest gładka.

Jeśli (x^i) jest lokalną mapą w M to iloczyn skalarny definiuje w każdym punkcie macierz symentryczną, dodatnio określoną złożoną z iloczynów skalarnych bazy:

$$g_{ij}(x) = (\frac{\partial}{\partial x^i}(x)|\frac{\partial}{\partial x^j}(x))$$

Dziękujemy za uwagę