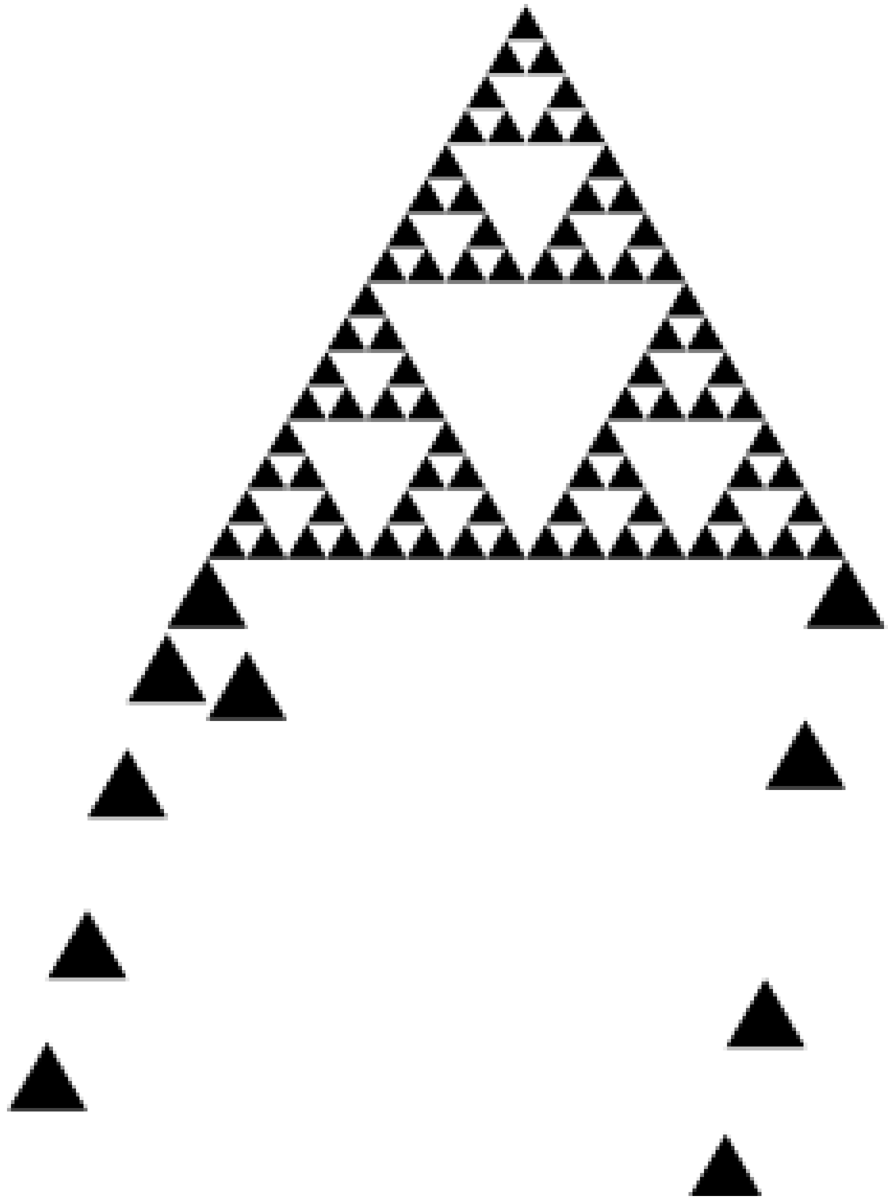
Fraktale i chaos deterministyczny

Anita Cichoń
Michał Kielian
Dominika Szeliga

Fraktale- ogólne wiadomości

- Fraktale są formami geometrycznymi, zawartymi w dziale matematyki, który opisuje i analizuje nieregularności oraz złożoność struktur rzeczywistego świata.
- Twórcą i odkrywcą tej geometrii jest, urodzony w 1924 roku w Warszawie, Benoit Mandelbrot.
- Matematyka definiuje fraktale jako zwarte podzbiory topologicznej przestrzeni metrycznej S, charakteryzowane przez wymiar fraktalny D i miarę fraktalną μ.



Cechy charakterystyczne fraktali (pod wzgledem budowy)

- ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej
- jest samo-podobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to przybliżonym lub stochastycznym,
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną
- ma naturalny („poszarpany”, „kłębiasty” itp.) wygląd.

Właściwości fraktalii

- Samopodobieństwo
- Symetria
- Wymiar fraktalny nie jest liczbą całkowitą
- Brak jednoznacznego kształtu
- Nie są określone wzorem matematycznym, tylko zależnością rekurencyjną

Zastosowanie fraktali

- Kompresja obrazów.
- Tworzenie grafiki komputerowej - przy pomocy
- algorytmu możemy generować zarówno krzywe fraktalne jak i figury z nich złożone, które w rzeczywistości wyglądają jak linie brzegowe, całe wyspy, góry czy chmury. Zapamiętując jedynie dwa początkowe punkty i wysokości trójkątów, możemy zapamiętać dowolną łamaną używając stosunkowo niewielkiej ilości pamięci.
- Powiększanie obrazów – dzięki zastosowaniu algorytmu wykorzystującego fraktale, możemy powiększać dany obraz, ponieważ obraz będzie miał nieskończoną rozdzielczość. Brakujące fragmenty nie będą co prawda odtwarzane dokładnie, lecz piksele staną się punktami, a nie kwadratami jak w grafice rastrowej

Zastosowanie fraktali c.d

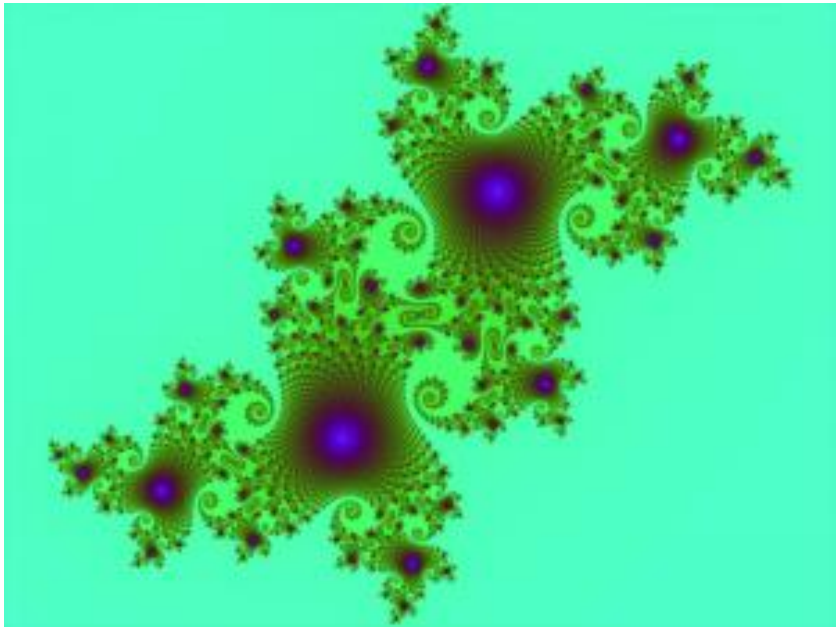
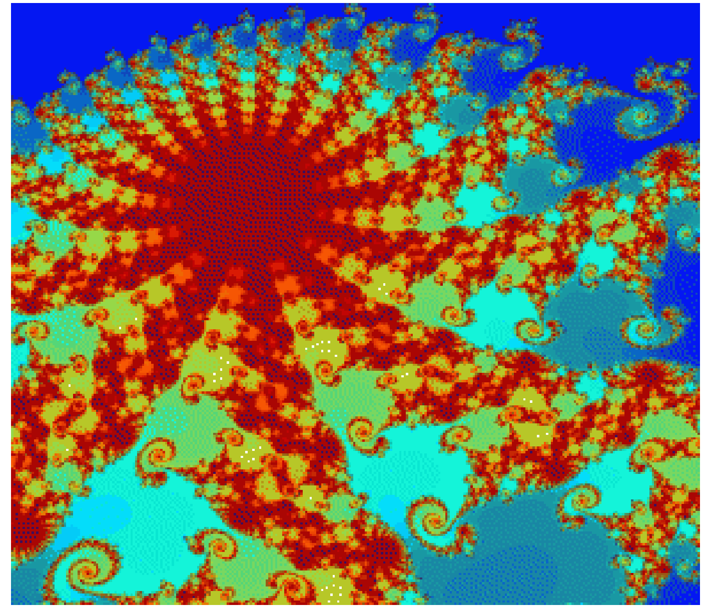
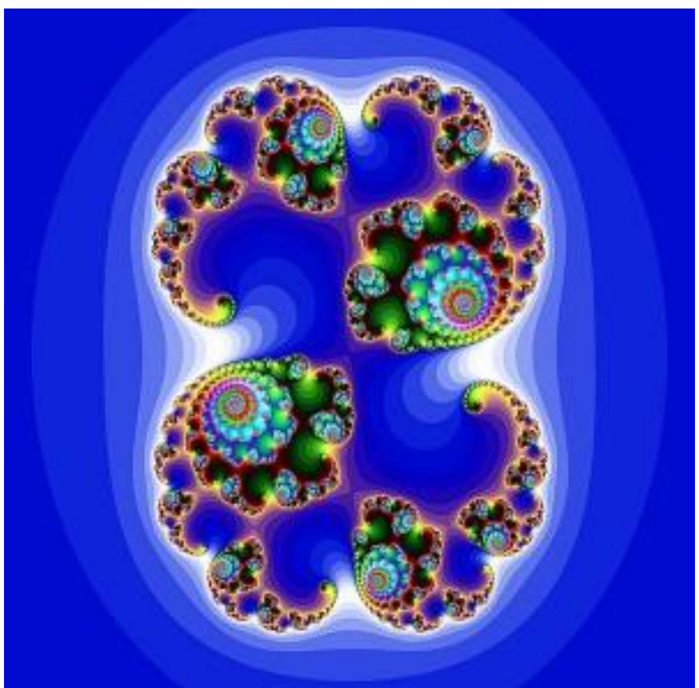
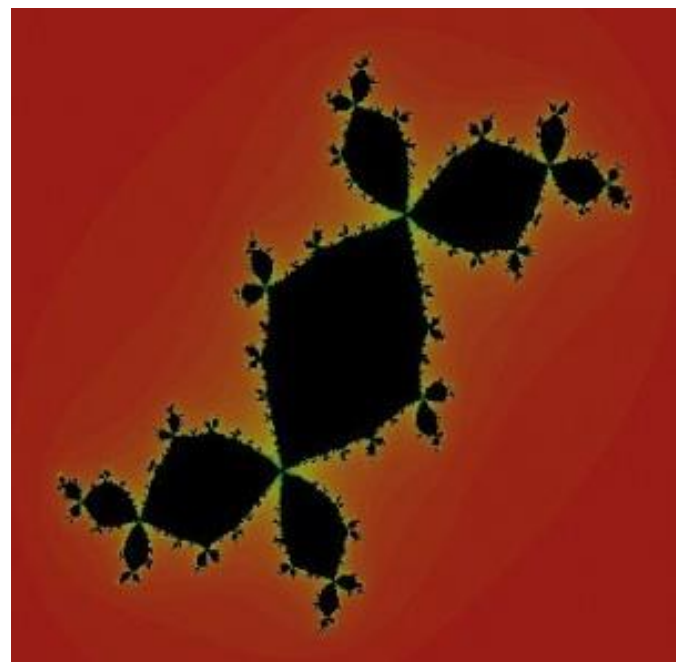
- Badanie nieregularności powierzchni
- Opis procesów chaotycznych zachodzących w układach dynamicznych.
- Przetwarzanie i kodowanie obrazów cyfrowych – kompresja fraktalna.
- Modelowanie tworów naturalnych dla celów realistycznej grafiki komputerowej.
- Badanie struktury łańcuchów DNA
- Tworzenia obrazów które nie powodują żadnych skojarzeń – wykorzystanie w psychologii

Rodzaje fraktali

- **Fraktale IFS** - stworzone za pomocą układu iterowanych odwzorowań,
- **Fraktale systemu Lindenmayera** - wygenerowane z wykorzystaniem systemu Lindenmayera,
- **Fraktale zespolone** - wykonane za pomocą iteracji pewnej zależności rekurencyjnej liczb zespolonych,
- **Fraktale hiperzespolone** - wykonane za pomocą iteracji pewnej zależności rekurencyjnej liczb hiperzespolonych,

Zbiory Julii

- Zbiory Julii konstruuje się na płaszczyźnie zespolonej. Pierwsze powstały w wyniku przekształceń iteracyjnych wielomianu stopnia drugiego o postaci: $Z_{n+1}=Z_n^2+C$, gdzie Z przebiega po liczbach zespolonych zaś C jest zespolonym parametrem określającym wygląd zbioru.
- Konstruując zbiór Julii, na początek należy przyjąć jakąś wartość C oraz Zn. W kolejnych krokach iteracji otrzymamy:
  Krok 0: Z_n
  Krok 1: $Z_n^2 + C$
  Krok 2: $(Z_n^2 + C)^2 + C$
  Krok 3: $((Z_n^2 + C)^2 + C)^2 + C$
  Krok 4: $(((Z_n^2 + C)^2 + C)^2 + C)^2 + C$
  W następnych krokach postępujemy podobnie, po prostu bierzemy poprzednie wyrażenie w nawias, podnosimy do kwadratu i dodajemy C.

Atraktory IFS

- Najprostszą metodą tworzenia fraktali jest wykorzystanie zbioru przekształceń afinicznych $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1}^{n}$ będących przekształceniami zwężającymi (kontrakcjami). Transformując dowolny, niepusty zbiór S, zgodnie z regułą (tworząc ciąg zbiorów):

$$S_0 = S$$

$$S_k = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i(S_{k-1})$$

Atraktory IFS

- W granicy otrzymujemy: $S_\infty = \lim_{k \to \infty} S_k$,
- atraktor układu, który w szczególności może być fraktalem. Zbiór $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1}^{n}$, nazywamy w tym przypadku systemem przekształceń iterowanych (IFS), zaś otrzymany w powyższej granicy fraktal jest atraktorem tego systemu. Jego istnienie wynika z twierdzenia Banacha o punkcie stałym odwzorowania zwężającego. W ten sposób można wygenerować m.in. następujące fraktale: zbiór Cantora, krzywa Kocha, smok Heighwaya, trójkąt Sierpińskiego, kostka Mengera, paproć Barnsleya.

Atraktory IFS

- W praktyce aby wygenerować fraktal wybieramy dowolny punkt x i transformujemy go kilka razy za każdym razem losując odpowiednio przekształcenie Fi:

$$x_0 = x;\ x_{n+1} = F_i(x_n).$$

- Procedurę tę powtarzamy np. kilka tysięcy razy. W szczególnych przypadkach dla efektu wizualnego może być istotny sposób losowania przekształceń. Np. dla paproci Barnsleya przekształcenia Fi, i=1..4 losuje się z częstościami 85%, 7%, 7%, 1% odpowiednio.

Trójkąt Sierpińskiego

- Konstrukcję trójkąta Sierpińskiego rozpoczynamy od trójkąta równobocznego, który następnie poddajemy ponizszym odwzorowaniom:

$$f_1(x,y) = (\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{4}, \tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4})$$

$$f_2(x,y) = (\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}, \tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4})$$

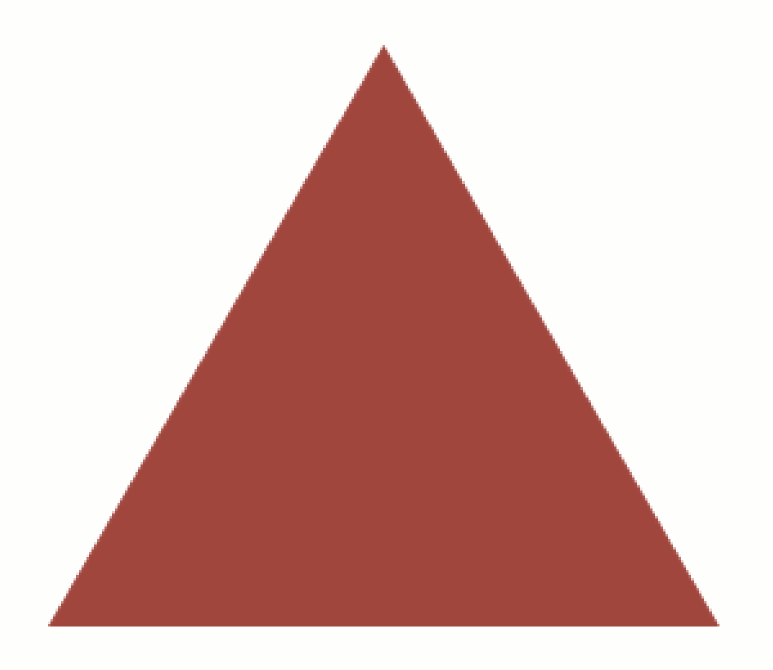
$$f_3(x,y) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{4})$$

- To samo możemy otrzymać za pomocą rekurencji zaczynając również od trójkąta równobocznego:
- Podziel trójkąt na cztery trójkąty w skali 1:2,
- Usuń środkowy trójkąt, pozostawiając jego brzeg,
- Powtórz czynności dla pozostałych trójkątów.

Trójkąt Sierpińskiego

- Jako, że trójkąt Sierpińskiego jest zbiorem spójnym i pole powierzchni ma równe zeru, a jego wymiar topologiczny jest równy jeden. Nasz zbiór składa się z trzech swoich kopii, które są od niego dwa razy mniejsze. W takim razie:

$$s^D N = \frac{3}{2^D} = 1$$



Dywan Sierpińskiego

- Dywan Sierpińskiego jest podobny w sposobie tworzenia do trójkąta Sierpińskiego. Za pomocą IFS wyrazimy dywan Sierpińskiego przez osiem przekształceń, którymi będziemy odwzorowywać kwadrat:

$$f_1(x,y) = \left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3}, \tfrac{y}{3} + \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f_2(x,y) = \left(\tfrac{x}{3}, \tfrac{y}{3} + \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f_3(x,y) = \left(\tfrac{x}{3} + \tfrac{1}{3}, \tfrac{y}{3} + \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f_4(x,y) = \left(\tfrac{x}{3} + \tfrac{1}{3}, \tfrac{y}{3}\right)$$

$$f_5(x,y) = \left(\tfrac{x}{3} + \tfrac{1}{3}, \tfrac{y}{3} - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f_6(x,y) = \left(\tfrac{x}{3}, \tfrac{y}{3} - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f_7(x,y) = \left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3}, \tfrac{y}{3} - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f_8(x,y) = \left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3}, \tfrac{y}{3}\right)$$

Dywan Sierpińskiego

- Zapis rekurencyjny dla dywanu Sierpińskiego :
- Podziel kwadrat na dziewięć kwadratów w skali 1:3,
- Usuń środkowy kwadrat, pozostawiając jego brzeg,
- Powtórz czynności dla pozostałych kwadratów.

Dywan Sierpińskiego

- W ten sposób otrzymujemy zbiór punktów, który jest domknięty, spójny i jego pole powierzchni jest równe zero. Dodatkowo każdy punkt tego fraktala jest jego punktem brzegowym.
- Identycznie jak w przypadku trójkąta Sierpińskiego, wymiar topologiczny mamy równy jeden. Widzimy, że fraktal składa się z ośmiu swoich kopii, każda w skali s=1/3. Wobec tego mamy równanie:

$$s^D N = \frac{8}{3^D} = 1$$

- Po wyznaczeniu D mamy:

$$D = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,8928$$

Chos deterministyczny

- Chaos deterministyczny – własność równań lub układów równań, polegająca na dużej wrażliwości rozwiązań na dowolnie małe zaburzenie parametrów. Dotyczy to zwykle nieliniowych równań różniczkowych i różnicowych, opisujących układy dynamiczne.

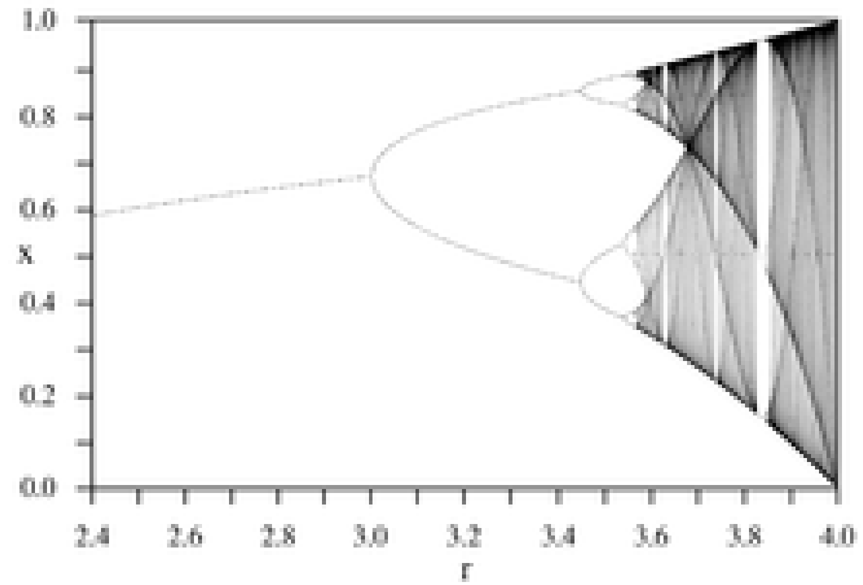


Diagram bifurkacji, pokazujący dojście do zachowania chaotycznego.

Zachowanie układów chaotycznych

- Ścisłym kryterium chaotyczności jest określenie wartości wykładników Lapunowa. Układ jest chaotyczny, jeśli ma co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa. W takim wypadku w przestrzeni fazowej blisko leżące trajektorie mogą po pewnym czasie dowolnie się od siebie oddalić (to oddalanie się "z czasem" różnych trajektorii obliczonych dla odmiennych wartości parametru leży w definicji chaotyczności względem tego parametru). Choć dla idealnie dokładnie zadanych parametrów początkowych jesteśmy w stanie dokładnie przewidzieć zachowanie się układu, w praktyce, gdzie warunki początkowe znane są zawsze ze skończoną dokładnością, w krótkim czasie układ staje się nieprzewidywalny

Przykłady układów chaotycznych

- układy równań różniczkowych (układy dynamiczne):
  - układ Lorenza
  - układ Rosslera
  - układ Hénona-Heilesa
  - wahadło z wymuszeniem
  - niektóre autokatalityczne reakcje chemiczne
  - równania fenomenologiczne opisujące migotanie świetlówki
  - proste modele układów populacyjnych, np. układ Lotka-Volterra
- układy równań różnicowych:
  - iteracja równań kwadratowych, np. 1-wymiarowe odwzorowanie logistyczne i 2-wymiarowe odwzorowanie Hénona
  - bilardy chaotyczne

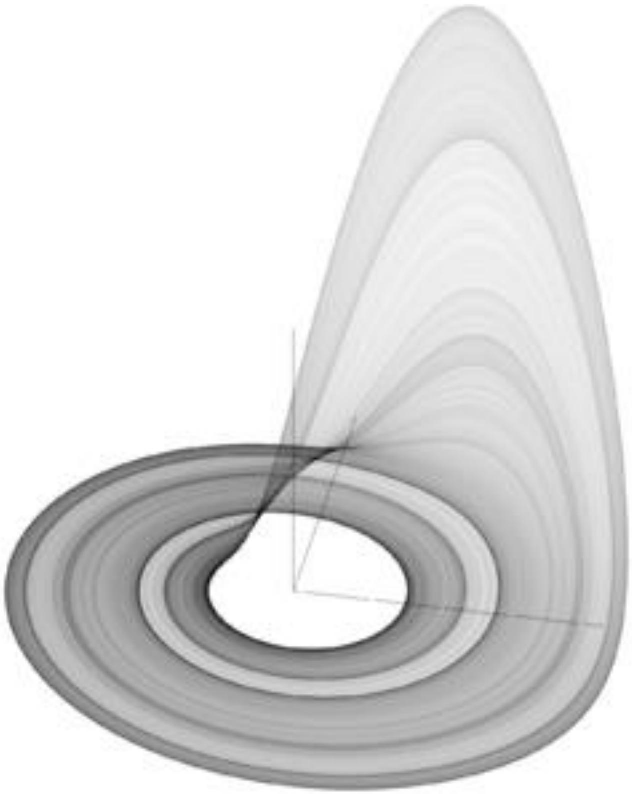
Układ Rosslera

- Układ Rosslera albo odwzorowanie Rosslera to układ trzech sprzężonych nieliniowych równań różniczkowych przedstawionych przez Otto Rosslera w 1976.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

Dla odwzorowania przy parametrach (a=0,2 i b=0,2) startując z punktu początkowego na płaszczyźnie układu dochodzi się do zbioru punktów nazywanych dziwnym atraktorem Rosslera

Układ Rosslera



Układ Lorenza

- Układ Lorenza – przedstawiony przez Edwarda Lorenza w 1963 roku układ trzech nieliniowych równań różniczkowych modelujący w możliwie najprostszy sposób zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze. Dla pewnego zbioru parametrów układ zachowuje się chaotycznie, a wykres zmiennych w przestrzeni fazowej przedstawia dziwny atraktor (tzw. *atraktor Lorenza*).

Układ Lorenza

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

gdzie:

σ – liczba Prandtla, charakteryzująca lepkość ośrodka,

r – liczba Rayleigha, charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka,

b – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny

- Stałe *σ*, *r* i *b* są dodatnie, ale zwykle *σ* = 10, *b* = 8/3, a *r* jest zmienne. Układ przejawia chaos dla *r* = 28, ale przejawia również splątane orbity okresowe dla innych wartości *r*, np. dla *r* = 99,96 układ staje się *T*(3,2) węzłem torusowym.

Układ Lorenza