Formy różniczkowe w R^3

Justyna Olczak, Magdalena Oćwieja

Luty, 2017

Definicje form

0-forma
Funkcja skalarna $f(x, y, z)$
1-forma
Kombinacja liniowa form bazowych dx, dy, dz w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}_x dx + a_y dy + a_z dz$$

gdzie składowe formy a_x, a_y, a_z są funkcjami współrzędnych x, y, z. Formy bazowe to analogia wersorów na osiach kartezjańskiego układu współrzędnych, a sama 1-forma to inny sposób zapisu wektora.

Definicje form

2-forma

W układzie kartezjańskim można ją zapisać:

$$\mathrm{b} = \mathrm{b}_x dy \wedge dz + b_y dz \wedge dx + b_z dx \wedge dy$$

gdzie składowe formy b_x, b_y, b_z są funkcjami współrzędnych x, y, z.
$\wedge$ jest operacją iloczynu zewnętrznego form.
Iloczyn zewnętrzny jest nie przemienny, ma on następującą własność:

$$\mathrm{a} \wedge b = (-1)^{kl} b \wedge a$$

k- stopień formy a,
l- stopień formy b

Definicje form

3-forma

Odpowiednik funkcji skalarnej

$$\mathrm{c} = \mathrm{c}\ (\mathrm{x,y,z})\ \mathrm{dx} \wedge dy \wedge dz$$

4-forma

W przestrzeni trójwymiarowej nie ma ich, bo są tylko trzy formy bazowe dx, dy, dz i na przykład wyrażenie:

$$\mathrm{dx} \wedge dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

Możemy wyznaczyć analogię języka form i analizy wektorowej:
0-forma to pole skalarne $f(x, y, z)$
1-forma to pole wektorowe $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$
2-forma to pole pseudowektorowe $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$
3-forma to pole pseudoskalarne $c(x, y, z)$

Jeśli rozważymy operację inwersji przestrzennej

$$I : (x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$$

to pod jej działaniem pseudowektor (2-forma) nie zmienia znaku

$$I : dx \wedge dy \longrightarrow (-dx) \wedge (-dy) = 0$$

Innymi słowy przy odbiciu lustrzanym pseudowektor nie zmienia znaku. Przykładem takiego pseudowektora jest wektor indukcji magnetycznej $\overrightarrow{B}$.

Operacja różniczkowania form

Operację która formalnie polega na dopisaniu litery d nazywamy pochodną zewnętrzną formy ω. Jeśli ω jest formą stopnia k, to jej pochodna zewnętrzna $d\omega$ jest formą stopnia k - 1.
Przy wykonywaniu operacji pochodnej zewnętrznej wychodzi się od **0-formy**.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Pochodna zewnętrzna **0-formy** jest równoważna operacji gradientu funkcji skalarnej ∇f. Pochodna zewnętrzna ma tę wygodną własność, że dwukrotne różniczkowanie daje zero!

$$dd\omega = 0$$

Następująca reguła Leibnitza określa jak różniczkować iloczyn zewnętrzny form.

$$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \omega_2$$

k stopień formy ω_1 (k-formy)

Formy zamknięte i zupełne

ω jest formą zamkniętą jeżeli zachodzi:

$$d\omega = 0$$

czyli jeśli jej pochodna zewnętrzna znika.
ω jest formą zupełną jeżeli zachodzi:

$$\omega = d\tau$$

czyli jeśli istnieje pewna forma τ, dla której ω jest jej pochodną zewnętrzną. Oczywiście jeśli forma jest zupełna to także jest zamknięta, ponieważ:

$$\omega = dd\tau = 0$$

W drugą stronę obowiązuje Lemat Poincareégo:
Forma zamknięta jest także zupełna jeśli w obszarze, który rozpatrujemy każda krzywa zamknięta jest ściągalna do punktu. Taki obszar nazywa się jednospójnym.

Lemat Poincareégo dla **1-formy** w $\mathbf{R}^3$

$$dA = 0 \longrightarrow A = df$$

w notacji wektorowej

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = 0 \longrightarrow \overrightarrow{A} = \nabla f$$

Lemat Poincareégo dla **1-form** odpowiada twierdzeniu o istnieniu potencjału skalarnego dla pola bezwirowego.

Lemat Poincareégo dla **2-formy** w $\mathbf{R}^3$

$$dA = 0 \longrightarrow A = dB$$

w notacji wektorowej

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 0 \longrightarrow \overrightarrow{A} = \nabla \times \overrightarrow{B}$$

Lemat Poincareégo dla **2-form** odpowiada twierdzeniu o istnieniu potencjału wektorowego dla pola bezźródłowego.

Pierwsza zasada termodynamiki

Konwencja zapisu pracy i ciepła:

$$dQ = dU + dW$$

gdzie dQ jest formą ciepła (ciepło **dostarczone** do układu), dW jest forma pracy (praca **wykonana** przez układ). Są to **formy niezupełne!** Co oznacza, że nie istnieją 0-formy (funkcje skalarne) Q i W (ciepło i praca), których te formy są pochodnymi.
Z kolei dU czyli zmiana energii wewnętrznej układu jest formą zupełną — pochodną 0-formy U — energii wewnętrznej.

Druga zasada termodynamiki

Matematyk Caratheodory Stwierdził, że forma ciepła $đQ$ nie jest zupełna, ale istnieje dla niej czynnik całkujący

$$\lambda = \frac{1}{T}$$

Jest to nic innego jak **druga zasada termodynamiki**.

$$dS = \frac{1}{T} dQ$$

Forma zupełna dS powstała z formy ciepła $đQ$, jest pochodną zewnętrzną 0-formy entropii S.

Dziękujemy za uwagę!