Spin

Andrzej Kozioł, Jacek Matiolański, Jan Sito, Łukasz Dębski

16 luty 2017

Spis treści

- Rok 1925, dwóch holenderskich fizyków: S.A.Goudsmit i G.E.Uhlenbeck wysuwa hipotezę istnienia tzw. własnego momentu pędu elektronu $\overrightarrow{s}$ (spin), a także związanego z nim własnego momentu magnetycznego $\overrightarrow{\mu_e}$

Figure: Samuel A. Goudsmit

Figure: George E. Uhlenbeck

Hipoteza spinu miała wyjaśniać:

- subtelną strukturę lini widmowych
- anomalny efekt Zeemana
- doświadczenie Sterna Gerlacha (1922)

Hipoteza spinu miała wyjaśniać:

- subtelną strukturę lini widmowych
- anomalny efekt Zeemana
- doświadczenie Sterna Gerlacha (1922)

Hipoteza spinu miała wyjaśniać:

- subtelną strukturę lini widmowych
- anomalny efekt Zeemana
- doświadczenie Sterna Gerlacha (1922)

Hipoteza spinu miała wyjaśniać:

- subtelną strukturę lini widmowych
- anomalny efekt Zeemana
- doświadczenie Sterna Gerlacha (1922)

Operatory spinu i ich własności

Istnieją obserwable S_1, S_2, S_3 takie, że $S_i : D \to D, D \subseteq H$ (D - przestrzeń Schwartza, H - przestrzeń Hilberta), które podlegają relacjom komutacji:

$$\left.\begin{aligned} [S_1, S_2] &= iS_3 \\ [S_2, S_3] &= iS_1 \\ [S_3, S_1] &= iS_2 \end{aligned}\right\} \text{w D}$$

Reprezentacje macierzowe spinu (macierze Pauliego)

$$S_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, S_2 = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, S_3 = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow$ macierze Pauliego

Ogólne własności operatorów

Dla zbioru trzech dowolnych operatorów $J_1, J_2, J_3 : D \to D \subseteq H$

zbiór wartości własnych operatora J_j spełnia taką relacje:

$\sigma_{\substack{pure \\ point}}(J_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2} = \{0, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -1, +1, ...\}$, gdzie $j = 1, 2, 3$

Przykłady:

$\sigma(L_j) = \mathbb{Z}$ oraz $\sigma(S_j) = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Zaczynamy od:

$J_j : D \to D \subseteq H$, gdzie $j = 1, 2, 3$

oraz

$$[J_1, J_2] = iJ_3$$
$$[J_2, J_3] = iJ_1$$
$$[J_3, J_1] = iJ_2$$

wprowadzamy operator $\underbrace{\Omega}_{\vec{J}^2} = J_1 \circ J_1 + J_2 \circ J_2 + J_3 \circ J_3$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Zauważamy następującą zależność:

$$[\Omega, J_j] = 0 \qquad\qquad j = 1, 2, 3$$

Operator Ω, który komutuje z każdym elementem przesteni $\{J_1, J_2, J_3\}$ nazywamy operatorem Casimira

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Wprowadźmy następujące operatory:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_+ := J_1 + iJ_2 \\ J_- := J_1 - iJ_2 \\ J_3 \end{array} \right\}$$

które są zamienne z operatorami $\left\{ \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{array} \right\}$

Podstawienie to nie powoduje straty informacji

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Komutacja operatorów J_+, J_-, J_3 wygląda nastepująco:

$$[J_+, J_-] = 2J_3$$

$$[J_3, J_+] = J_+$$

$$[J_3, J_-] = -J_-$$

oraz

$$[\Omega, J_+] = 0, \quad [\Omega, J_-] = 0, \quad [\Omega, J_3] = 0$$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Operator Ω może być przedstawiony za pomocą operatorów J_+, J_-, J_3 na dwa równoważne sposoby:

$$\Omega = \begin{cases} J_+ J_- + J_3(J_3 - id_D) \\ J_- J_+ + J_3(J_3 + id_D) \end{cases}$$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Szukamy wspólnych wektorów własnych operatorów Ω i J_3

$J_3\psi_{\lambda,\mu} = \mu\psi_{\lambda,\mu}$ oraz $\Omega\psi_{\lambda,\mu} = \lambda\psi_{\lambda,\mu}$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

- $\lambda\langle\psi_{\lambda,\mu}, \psi_{\lambda,\mu}\rangle = \langle\psi_{\lambda,\mu}, \Omega\psi_{\lambda,\mu}\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \left\{ \begin{array}{c} \frac{||J_-\psi_{\lambda,\mu}||^2}{||\psi_{\lambda,\mu}||} + \mu(\mu-1) \\ \frac{||J_+\psi_{\lambda,\mu}||^2}{||\psi_{\lambda,\mu}||} + \mu(\mu+1) \end{array} \right\} \quad (1)$$

- $\lambda \geq \left\{ \begin{array}{c} \mu(\mu-1) \\ \mu(\mu+1) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \geq |\mu|(|\mu|+1) \quad (2)$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

- $\lambda\langle\psi_{\lambda,\mu}, \psi_{\lambda,\mu}\rangle = \langle\psi_{\lambda,\mu}, \Omega\psi_{\lambda,\mu}\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \left\{ \begin{array}{c} \frac{||J_-\psi_{\lambda,\mu}||^2}{||\psi_{\lambda,\mu}||} + \mu(\mu - 1) \\ \frac{||J_+\psi_{\lambda,\mu}||^2}{||\psi_{\lambda,\mu}||} + \mu(\mu + 1) \end{array} \right\} \quad (1)$$

- $\lambda \geq \left\{ \begin{array}{c} \mu(\mu - 1) \\ \mu(\mu + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \geq |\mu|(|\mu| + 1) \quad (2)$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

- $\lambda\langle\psi_{\lambda,\mu}, \psi_{\lambda,\mu}\rangle = \langle\psi_{\lambda,\mu}, \Omega\psi_{\lambda,\mu}\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \left\{ \begin{array}{c} \frac{||J_-\psi_{\lambda,\mu}||^2}{||\psi_{\lambda,\mu}||} + \mu(\mu - 1) \\ \frac{||J_+\psi_{\lambda,\mu}||^2}{||\psi_{\lambda,\mu}||} + \mu(\mu + 1) \end{array} \right\} \qquad (1)$$

- $\lambda \geq \left\{ \begin{array}{c} \mu(\mu - 1) \\ \mu(\mu + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \geq |\mu|(|\mu| + 1) \quad (2)$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Prawdziwe są zależności:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(J_+\psi_{\lambda,\mu}) = \lambda(J_+\psi_{\lambda,\mu}) \\ J_3(J_+\psi_{\lambda,\mu}) = (\mu+1)(J_+\psi_{\lambda,\mu}) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(J_-\psi_{\lambda,\mu}) = \lambda(J_-\psi_{\lambda,\mu}) \\ J_3(J_-\psi_{\lambda,\mu}) = (\mu-1)(J_-\psi_{\lambda,\mu}) \end{array} \right\}$$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Jeśli $J_+\psi_{\lambda,\mu} \neq 0$, to
$J_+\psi_{\lambda,\mu}$ jest wspólnym wektorem własnym dla Ω i J_3

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

$$\left.\begin{array}{ll} {J_+}^n \psi_{\lambda,\mu} = 0 & \forall_{n \geqslant N \in \mathbb{N}} \\ {J_-}^n \psi_{\lambda,\mu} = 0 & \forall_{m \geqslant M \in \mathbb{N}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists \; \overline{\mu}(\lambda), \underline{\mu}(\lambda) : \quad \overline{\mu}(\lambda) \leqslant \mu \leqslant \underline{\mu}(\lambda)$$

$$\underline{\mu}(\lambda)(\underline{\mu}(\lambda) - 1) = \lambda = \overline{\mu}(\lambda)(\overline{\mu}(\lambda) + 1)$$

$$\lambda = \overline{\mu} - \underline{\mu} \in \mathbb{N}_0$$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Uwzględniając relacje:

1. $\underline{\mu}(\lambda) = -\overline{\mu}(\lambda)$
2. $2\overline{\mu}(\lambda) \in \mathbb{N}_0$
3. $\lambda = \overline{\mu}(\lambda)(\overline{\mu}(\lambda) + 1)$

wprowadzamy twierdzenie:
Wspólne wektory własne Ω i J_3 występują w rodzinach dla ustalonego j:

$$\Psi_{j(j+1),m}$$

$$\text{gdzie } m = \{-j, -j+1, ..., j-1, j\} \qquad j := \overline{\mu}(\lambda)$$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Po znormalizowaniu:

$$\Phi_{j,m} := \frac{\Psi_{j(j+1),m}}{||\Psi_{j(j+1),m}||} \qquad j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$$

$$\langle \phi_{j,m}, \phi_{\tilde{j},\tilde{m}} \rangle = \delta_{j\ \tilde{j}} \delta_{m\tilde{m}}$$

Wykazanie relacji $\sigma(L_j) \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2}$

Konkluzje:

- $j(j+1)$ to wartości własne Ω
- m to wartości własne J_3

Ze względu na relacje $1, 2, 3$ dochodzimy do:

$$m \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$$

Pure spin-j system

System kwantowo-mechaniczny jest nazywany pure spin-j system, jeżeli jego przestrzeń Hilberta H jest $j(j+1)$-wymiarowa dla $j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$, i która posiada baze stworzoną z wektorów własnych $\Phi_{j,m}$, gdzie $m = -j, ..., j$, dla zbioru trzech operatorów J_1, J_2, J_3 zdefiniowanych w przestrzeni H.

Pure spin-j system

Przykład:

pure spin-j	$\sigma(J_j) \quad j = 1, 2, 3$
0	$\{0\}$
$\frac{1}{2}$	$\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$
1	$\{-1, 0, 1\}$
.	.
.	.
.	.

Prezentacja została przygotowana w oparciu o wykład:
"Spin - L13 - Frederic Schuller" dostępny na stronie internetowej YouTube
adres internetowy:
https://www.youtube.com/watch?v=-SM3qnK24BU (16.02.2016)