Przestrzenie liniowe

Klaudia Tokarz
Agnieszka Rabiej
Joanna Kristek

Problem nieskończenie wielu kierunków w nieskończenie wymiarowej przestrzeni ma wiele zaskakujących aspektów. Dlatego koniecznie trzeba zbadać szczegółowo, które ze znanych właściwości przestrzeni skończenie wymiarowych ulegają zmianie a które pozostają bez zmian.

Definicja 1

- Przestrzenią liniową(lub wektorową) F ∋ v_i nad zbiorem liczb zespolonych F ∋ α_i jest zbiór, w którym suma

F x F -> F : (v,u) -> v + u = u +v

i iloczyn przez skalary

F x L -> F : (v,α) -> αv

są tak zdefiniowane, że

$$\alpha_1 (\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2) v,$$
$$\alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u,$$
$$1 * v = v,$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2) v = \alpha_1 v + \alpha_2 v.$$

Przykłady

- 1 wektory w F^n
- 2 macierze zespolone $n \times n$
- 3 wielomiany n zmiennych zespolonych
- 4 C^r : funkcje z ciągłą pochodną rzędu r
- 5 funkcje analityczne
- Dodawanie i mnożenie przez α są zdefiniowane w zwykły sposób

Definicja 2

- Przestrzenią liniową unormowaną jest przestrzeń wektorowa, na której zdefiniowane jest takie odwzorowanie normy

$$F\text{->}R^{+}:v\text{->}\|v\|,$$

że

$$\|\alpha v\|=|\alpha|\ \|v\|,\ \|v+u\|\leq \|v\| + \|u\|$$

(nierówność trójkąta) i

$$\|v\|=0\leftrightarrow v=0.$$

Definicja 3

- Jeśli norma na F spełnia prawo równoległoboku

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2,$$

to F nazywa się przestrzenią unitarną (lub prehilbertowską), w tym przypadku istnieje iloczyn skalarny

$$F \times F \to L: (u, v) \to < u|v > := \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 - i\|u+iv\|^2 + i\|u-iv\|^2\right),$$

który ma następujące właściwości:

$$\|v\|^2 = < v|v >, < v|u > = < u|v >^*, \quad < v|\alpha > = \alpha < v|u >,$$

$$< u|v+w > = < u|v > + < u|w > \; i < v|v > = 0 \; \leftrightarrow v = 0.$$

Definicja 4

- Przestrzeń unormowana jest zupełna jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny. Zupełna przestrzeń liniowa unormowana (odpowiednio unitarna) jest przestrzenią Banacha (odpowiednio Hilberta).

Definicja 5

- Funkcjonałem liniowym *w* na przestrzeni wektorowej F jest takie odwzorowanie:

$$F \to L : v \to (w|v), \dot{z}e\ (w|v_1 + v_2) =$$

$$= (w|v_1) + (w|v_2)$$

$$i$$

$$(w|\alpha v) = \alpha(w|v) d$$

$$la\ \alpha \in L.$$

Przykłady:

- Funkcjonałami liniowymi są:
- Iloczyny skalarne z wektorem
- Ślady iloczynu macierzy przez pewną inną macierz
- Funkcjonałami liniowymi w innych przykładach są całki z iloczynu funkcji i dystrybucji oraz wiele innych obiektów.

Definicja 6

- Przestrzeń liniowa F’ ciągłych funkcjonałów liniowych nad przestrzenią Banacha F nazywa się jej przestrzenią sprzężoną (dualną).

Definicja 7

- Bazy otoczeń wektorów $w \in F'$ określamy jako:

$$U_{v,\varepsilon}(w) = \{w' \in F' : |(w - w'|v)| < \varepsilon\}, v \in F, \varepsilon \in R^+,$$

lub

$$U_{\varepsilon}(w) = \bigcap_{\|v\|=1} U_{v,\varepsilon}(w).$$

Otrzymujemy w ten sposób *–słabą i mocną topologię; mocna topologia jest równoważna topologii określonej przez normę

$$\|w\| = \sup_{\|v\|=1} |(w|v)|$$

i F’ staje się przestrzenia Banacha. Przestrzeń sprzężoną do niej oznacza się przez F” i F”Ↄ F. Jeśli F” =F (przy wzajemnie jednoznacznym utożsamieniu elementów F” z elementami F), to F nazywa się przestrzenią refleksywną.

Definicja 8

- Niech L(F,J) oznacza przestrzeń ciągłych odwzorowań liniowych z przestrzeni Banacha F do przestrzeni Banacha J.

Jeśli F=J to zdefiniujmy

$$B\,(F) := L\,(F,F).$$

Elementy $a \in L\,(F,J)$ nazywa się także operatorami.

Definicja 9

- Bazy otoczeń elementów a ∈ L (F,J) można zadać jako

$$U_{y',x,\varepsilon}(a) = \{a' : |(y'|(a-a')x)| < \varepsilon\},$$

lub

$$U_{x,\varepsilon}(a) = \left\{a' : \|(a-a')x\|_J < \varepsilon\right\} = \bigcap_{\|x\|=1} U_{y',x,\varepsilon}(a),$$

lub

$$U_{\varepsilon}(a) = \bigcap_{\|x\|=1} U_{x,\varepsilon}(a).$$

Definicja 9 c.d.

- Topologie nazywa się odpowiednio słabą, mocną i jednostajną; odpowiadające im rodzaje zbieżności oznacza się przez $\rightharpoonup, \rightarrow$ i $\rightrightarrows$ (często stosowane są także oznaczenia w-lim, s-lim i lim).

Podsumowanie

- **Przestrzeń liniowa** lub **wektorowa** – zbiór obiektów (nazywanych "wektorami"), które mogą być skalowane i dodawane. Formalnie jest to zbiór z określonymi dwoma działaniami: dodawaniem elementów tej przestrzeni (wektorów) i mnożeniem przez elementy ustalonego ciała, które związane są ze sobą poniższymi aksjomatami. Przestrzenie liniowe to podstawowy obiekt badań algebry liniowej i analizy funkcjonalnej. Znajdują zastosowanie niemal we wszystkich gałęziach matematyki, naukach ścisłych i inżynierii.

- Naturalnymi przykładami przestrzeni liniowych są dwu- i trójwymiarowe przestrzenie euklidesowe. Wektory w tych przestrzeniach utożsamiane są odpowiednio z parami i trójkątami uporządkowanymi liczb rzeczywistych, reprezentowanymi często w postaci wektorów geometrycznych charakteryzowanych przez kierunek, zwrot oraz wartość, które zwykle przedstawia się jako strzałki. Wektory takie mogą być sumowane według reguły równoległoboku (dodawanie wektorów) lub mnożone przez liczby rzeczywiste (mnożenie przez skalar). Właściwości wektorów geometrycznych stanowią dobry intuicyjny model dla wektorów w bardziej abstrakcyjnych przestrzeniach liniowych, które nie mają interpretacji geometrycznej. Przykładem takiej przestrzeni jest np. zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.