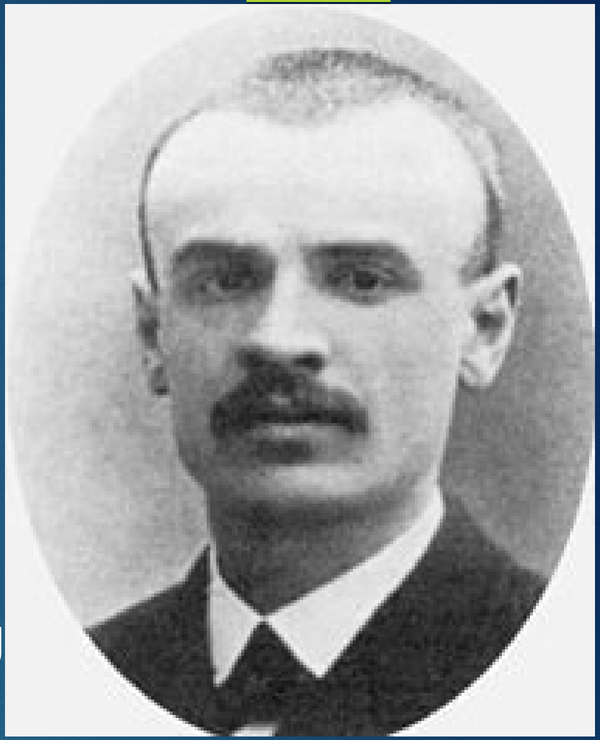
Przestrzeń Baire'a

MACIEJ DUDEK
MICHAŁ KACZMARCZYK

Czym jest przestrzeń Baire’a?



- Nazwa tej przestrzeni jest uhonorowaniem francuskiego matematyka René-Louisa Baire'a
- Pojęcie przestrzeni Baire’a odnosi się do pewnej własności przestrzeni topologicznych ale jest to też nazwa szczególneg przykładu takiej przestrzeni.

Szybko o przestrzeni topologicznej

- Przestrzeń topologiczna nazywamy zbiór X wraz z wyróżnioną rodziną T podzbiorów tego zbioru spełniajcych własności zwane aksjomatami topologii.

- Przestrzeń ta **może** być metryzowalna, po warunkiem istnienia takiej metryki d na X że każdy niepusty zbiór owarty X można przedstawić jako sumę pewnej rodziny kul otwartych względem metryki d.

Aksjomaty topologii

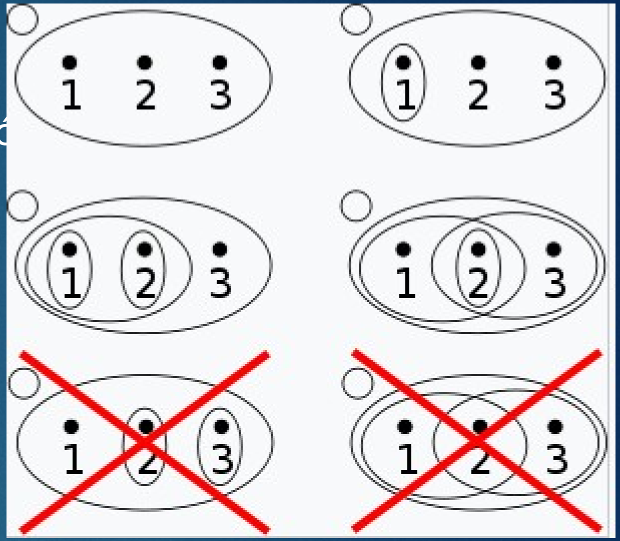
Gdy mamy zbiór X oraz rodzine podzbiorów T zawartych w X to musza one spełniać następujące warunki:

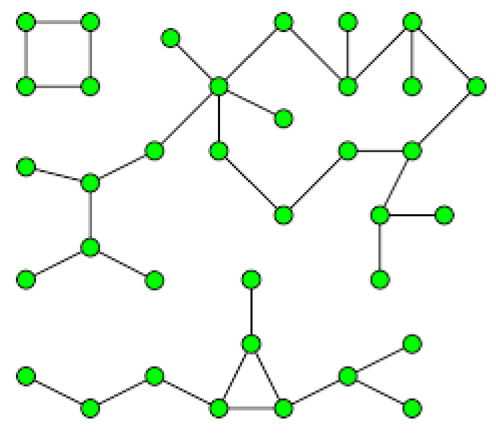
- zbiór X oraz zbiór pusty należą do T,

- część wspólna dowolnych dwóch zbiorów należących do T także należy do T,

- suma dowolnej rodziny zbiorów należących do T także należ do T,

wtedy T nazywamy topologia na zbiorze X lub rodziną zbiorów otwartych.





Elementami tej rodziny sa zbiory otwarte oraz dopełnienia do zbioru X zbiory domkniete.

Zbiory które są jednocześnie otwarte i zamknięte nazywamy zbiorami domkniętymi np. zbiór pusty.

Definicja przestrzeni

- Gdy (X,T) jest przestrzenią topologiczna to wtedy możemy powiedzieć że X jest przestrzenią Baire’a jeśli część wspólna każdej przeliczalnej rodziny otwartych gęstych podzbiorów X jest gęstym podzbiorem X.

Własności

- Niech $(X, \mathbb{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Wtedy następujące warunki są równoważne:

  - X jest przestrzenią Baire'a,

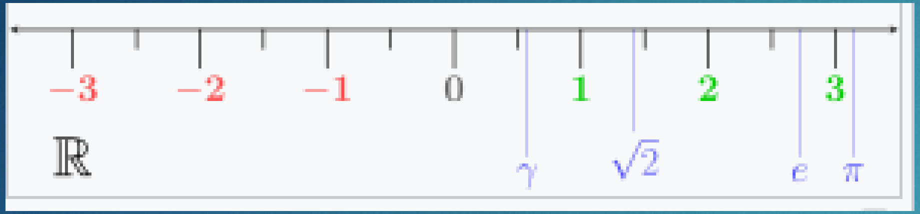
  - żaden otwarty niepusty podzbiór X nie jest pierwszej kategorii,

  - wnętrze sumy przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych jest puste

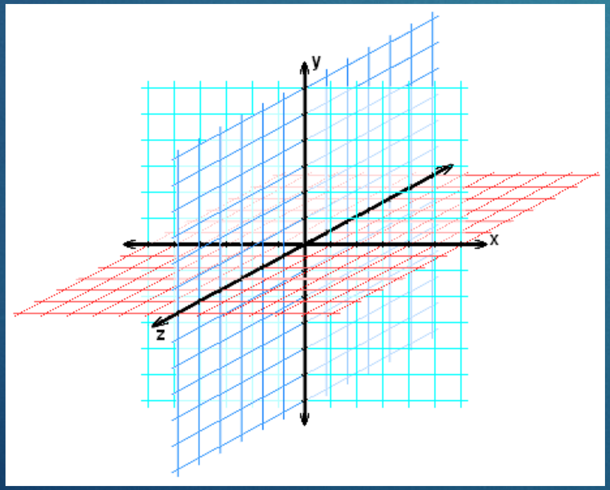
  - dla każdych domkniętych zbiorów $F_1, F_2, F_3, \dots \subseteq X$, jeśli $int(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \neq 0$ to $int(F_i) \neq 0$ dla pewnego i.

Przykłady przestrzeni Baire'a

Prosta rzeczywista R (czyli poprostu oś liczbowa)



oraz każda z przestrzeni euklidesowych.



Przykłady przestrzeni Baire'a

Jakakolwiek przestrzeń dyskretna.

Każda przestrzeń polska i ogólniej, przestrzeń zupełna.

Każda lokalnie zwarta przestrzeń **T_2** (przestrzeń Hausdorffa).

Szczególna przestrzeń

- Przestrzeń Braire'a jest też uzywana dla określenia przestrzeni wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach w liczbach naturalnych $\mathbb{N}$.
- Zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ może być traktowany jako produkt $\prod \mathbb{N}$ przeliczalnie wielu kopii zbioru $\mathbb{N}$. Jeśli na zbiorze liczb naturalnych wprowadzimy topologie przestrzeni dyskretnej, to wtedy na zbiorze $\prod \mathbb{N}$ wprowadzamy topologię produktywna T_B.
- Przestrzeń topologiczną($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,T_B) nazwać możemy przestrzenia Baire'a