

# Projekt semestralny

Justyna Jarosz  
Marcin Krzanowski  
Karolina Niemiec

8 lutego 2016

## 1 Projekt

Napisać program w języku Python, kolorujący obrazki wg teorii o czterech kolorach.

## 2 Teoria czterech kolorów

Pierwszy dowód podał w 1879 roku Alfred Bray Kempe i od tej chwili świat nauki uznał problem za rozwiązany, a autora dowodu uhonorowano nawet wieloma zaszczytami. Jednak w 1890 roku Percy John Heawood znalazł w dowodzie Kempego błąd na tyle poważny, że nie dało się go usunąć i tak twierdzenie o czterech barwach z powrotem stało się hipotezą. Po tym wydarzeniu zainteresowanie problemem wzrosło wielokrotnie, przez kolejne dziesiątki lat wielu matematyków zmagало się z nim bezskutecznie. Osiągano pewne częściowe wyniki (na przykład podnoszono sukcesywnie liczbę państw na mapie, które na pewno dadzą się pokolorować 4 barwami), analizowano coraz większą liczbę nowych przypadków, jednak formalny ścisły dowód nadal pozostawał poza zasięgiem ludzkich umysłów. Dopiero po upływie 124 lat, w 1976 roku Kenneth Appel i Wolfgang Haken przedstawili wielostronicowy dowód polegający na redukcji problemu do wielogodzinnej komputerowej analizy około dwóch tysięcy pojedynczych przypadków. Zamiast spodziewanego uczucia ulgi i radości, że ponad stuletni problem został w końcu rozwiązany, rozpetala się prawdziwa burza na pograniczu matematyki i filozofii. Zaczęto stawiać fundamentalne pytania, co właściwie może być uznane za dowód twierdzenia, czy dowód niemożliwy do weryfikacji przez człowieka może być uznany za wiarygodny i dla kogo właściwie dowodzimy twierdzenia: dla ludzi czy dla komputerów. Na domiar złego okazało się, że dowód ów zawiera kilka istotnych luk. Jednak po kolejnych poprawkach i redukcji liczby przypadków do zaledwie kilkuset oraz kolejnej publikacji matematycy uznali twierdzenie o czterech kolorach za udowodnione, choć pewien niedosyt pozostał i jeszcze z pewnością wielu matematyków nie spocznie w wysiłkach w poszukiwaniu dowodu z Księgi lub choćby takiego, którego weryfikacja nie będzie wymagać użycia komputera.

### 3 Twierdzenie

Twierdzenie głosi, że dowolna mapa polityczna, gdzie każdy kraj składa się tylko z jednego kawałka można zabarwić używając tylko 4 kolorów, tak aby żadne dwa kraje mające wspólną granicę (dłuższą niż punkt) nie miały tego samego koloru

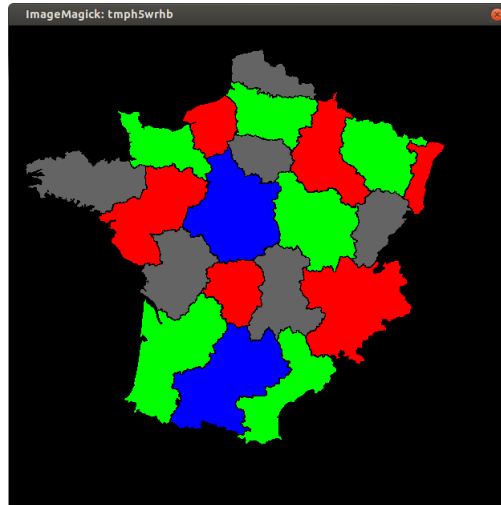


Figure 1: Przykład mapy Francji pokolorowanej wg teorii o 4 kolorach

### 4 O projekcie

W celu rozwiązania problemu zastosowania teorii 4 kolorów w praktyce, powstały trzy skrypty napisane w języku Python. Pierwszym z nich jest skrypt, który przygotowuje plik ze zdjęciem do rozpoznania. Na wejście tego skryptu podaje się plik z obrazkiem, natomiast zwraca on katalog, zawierające poszczególne, ciągłe, nie-czarne obszary tego obrazka, każdy w osobnym pliku. W skrypcie tym, posługujemy się funkcją rekursywną do mapowania obszarów. Funkcja ta zapisuje pierwszy nie-czarny rozpatrywany piksel, a następnie wywołuje się sama na każdym nie-czarnym sąsiedzie rozpatrywanego piksela. Oprócz plików z obrazkami przygotowuje także specjalny plik tekstowy opisujący, które obszary sąsiadują ze sobą, to znaczy stykają się w więcej niż jednym punkcie. Plik ten musi być niestety uzupełniony ręcznie, przed przystąpieniem do kolejnego kroku. Następny skrypt otwiera wszystkie pliki z obrazkami stworzonymi w tym kroku oraz stworzony ręcznie plik opisujący sąsiadujące obszary, i zamienia je plik testowy zawierający jedną strukturę, gotową do kolorowania. Struktura ta zawiera wiele informacji potrzebnych nam do pokolorowania obrazka: wielkość obrazka, listę pikseli stanowiących każdy obszar, listę sąsiadujących

ze sobą obszarów, kolor na jaki pokolorowany jest każdy obszar, środek obszaru. Na wyjściu tego skryptu powstaje plik tekstowy zawierający wszystkie te informacje, gotowy do pokolorowania i wyświetlenia przez ostatni skrypt. Skupmy się więc na strukturze algorytmu służącego do kolorowania. Pierwszym założeniem jest to, że twierdzenie o czterech kolorach jest prawdziwe, to znaczy, każda prawidłowo przygotowana mapa obszarów ciągłych da się pokolorować 4 kolorami tak, żeby każdy z sąsiadujących obszarów miał inny kolor. Stąd nasuwa się pierwsza teza – jeżeli pokolorujemy mapę 4 kolorami ale nie wszystkie obszary zostaną pokolorowane, oznacza to że coś zostało zrobione źle. Wiemy, że kiedy jakiś obszar zostanie pokolorowany na jakiś kolor, na ten sam kolor nie mogą zostać pokolorowane obszary sąsiadujące z nim. Oznacza to, że po pokolorowaniu jakiegoś obszaru, przed pokolorowaniem następnego obszaru tym samym kolorem, należy wykluczyć wszystkie obszary z nim sąsiadujące z tego zbioru. Ostatnim problemem, jaki napotkaliśmy podczas implementacji tej metody, jest dobór kolejności obszarów do kolorowania. Otóż, stosując nawet powyższe założenia, możemy zauważyć, że zły dobór kolejności kolorowania jednym kolorem może nie pozwolić na prawidłowe pokolorowanie obszaru. Najpewniejszym rozwiązaniem tego problemu, jest losowe dobieranie kolejności obszarów z kolorowaniem, a następnie, jeśli jakaś kolejność malowania nie doprowadzi do prawidłowego rezultatu, wylosowanie nowej kolejności z wykluczeniem tych, które nie dały prawidłowego wyniku. Widzimy więc, że taki algorytm jest bardzo zachłanny i skomplikowany, postawiliśmy więc inne założenie, mianowicie, że prawidłowe pokolorowanie map odbydzie się przez dobranie losowo punktu wejściowego, a następnie rozparzenie najbliższych obszarów. Taka metoda daje prawidłowe wyniki, przynajmniej dla obszarów spośród których przeważają wypukłe. Jesteśmy prawie przekonani, że podejście to zadziałało by dla każdej mapy, ale należało by wtedy określić odległość między obszarami w inny sposób, niż między ich środkami geometrycznymi.

## 5 W załączeniu:

- Filmy przedstawiające działanie programu
- Prezentacja stworzona przy pomocy Latex
- Pliki z kodem źródłowym