

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Rozwiązywanie metodą elementów skończonych wybranych zagadnień fizyki i techniki

Idea MES – przypomnienie

- Ideą metody elementów skończonych jest przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych zapisanych za pomocą sformułowania wariacyjnego:

Znaleźć $u \in V$ takie, że:

$$B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1)$$

w zbudowanej przez nas skończenie wymiarowej podprzestrzeni V_h oryginalnej przestrzeni funkcyjnej V :

Znaleźć $u_h \in V_h \subset V$ takie, że:

$$B(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2)$$

(Dla uproszczenia zaniedbaliśmy niezerowe warunki brzegowe typu Dirichleta.)

Jak widzieliśmy, prowadzi to do układu równań liniowych na współczynniki u_i rozwinięcia rozwiązania $u_h = \sum u_i \phi_i$ w funkcje bazowe ϕ_i przestrzeni V_h :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}, \quad u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x). \quad (3)$$

- Wychodząc z tej idei rozpatrzmy podejście MES do innych zagadnień fizycznych, ograniczając się tylko do podania odpowiednich sformułowań słabych $B(u, v) = L(v)$.

Wybrane zagadnienia

Omówimy następujące zagadnienia fizyki, które będą też tematem ćwiczenia laboratoryjnego #3:

- NS – przepływy nieściśliwe płynów (równania Naviera-Stokesa, ang. Navier-Stokes equations).
- CNS – przepływy ściśliwe (równania Naviera-Stokesa dla przepływów ściśliwych, ang. Compressible Navier-Stokes equations).
- EM – elektromagnetyzm (harmoniczne w czasie równania Maxwella, ang. ElectroMagnetics).
- LE – liniowa teoria sprężystości (ang. Linear Elasticity).
- BEM – metoda elementów brzegowych do elektromagnetyzmu (ang. Boundary Element Method).

Ostatnia z wymienionych metod nie należy do klasy MES, jednak zawiera wiele procedur tego podejścia i jest używana w naukach inżynierskich do zagadnień falowych akustyki i elektryczności.

NS - przepływy nieściśliwe

- Przepływy nieściśliwe są opisywane następującymi wielkościami:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – prędkość płynu,
- p – ciśnienie

ν – dynamiczny współczynnik lepkości – charakteryzuje własności płynu.

- Dla zwartego zapisu równań wprowadzamy następujące symbole operatorów różniczkowych:

- $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} := (u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \mathbf{u}$,
- $\nabla \cdot \mathbf{u} := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ – dywergencja pola wektorowego $\mathbf{u}$,
- $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3})$ – gradient pola skalarnego p ,
- $\Delta \mathbf{u} := \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2}$ – laplasjan pola $\mathbf{u}$.

Przepływy nieściśliwe

- Przepływ nieściśliwy jest rozpatrywany jako zmienny w czasie $t > 0$ w obszarze obliczeniowym Ω . Jest on opisywany następującym układem równań różniczkowych:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p & = & \nu \Delta \mathbf{u} \text{ w } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} & = & 0 \text{ w } \Omega, \\ \mathbf{u} & = & \hat{\mathbf{u}} \text{ na } \partial\Omega_1, \\ (\nu \nabla \mathbf{u} - \mathbf{I}p) \mathbf{n} & = & \hat{\mathbf{g}} \text{ na } \partial\Omega_2, \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_0 \text{ dla } t = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

- Ideę rozwiązania problemu za pomocą tzw. metody poprawek ciśnienia (lub metody Chorina) można przedstawić następująco:

Przenosimy wyraz $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ na prawą stronę i bierzemy dywergencję obu stron:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p &= \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}^{\mathbf{S}(\mathbf{u})} / \nabla \cdot \implies \\ 0 + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla p)}_{\Delta p} &= \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \Rightarrow \Delta p = \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5)$$

Przepływy nieściśliwe

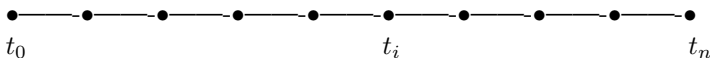
- Zauważamy, że gdyby znane było $\mathbf{u}$, to ciśnienie p można byłoby znaleźć rozwiązując (np. za pomocą MES) równanie Poissona:

$$-\Delta p = -\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (6)$$

wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

- Dyskretyzacja w czasie za pomocą różnic skończonych:

Dzielimy przedział czasowy $(0, T)$ punktami $0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T$, zwanymi węzłami, na n równych odcinków o długości $\Delta t = T/n$.



Zakładamy przybliżenie równania różniczkowego w czasie za pomocą różnic skończonych (progresywnych):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_n) \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \implies \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla p^n = \mathbf{S}(\mathbf{u}^n). \quad (7)$$

Pozwala to obliczać $\mathbf{u}^{n+1}$ za pomocą $\mathbf{u}^n$, całkując problem w czasie:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + [\mathbf{S}(\mathbf{u}^n) - \nabla p^n] \Delta t, \quad (8)$$

gdzie p^n jest rozwiązaniem równania Poissona $-\Delta p^n = -\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}^n)$.

CNS – przepływy ściśliwe (naddźwiękowe)

- Przepływy ściśliwe opisują następujące wielkości:
 - ρ – gęstość płynu,
 - $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^T$ – pęd na jednostkę objętości
 - e – energia całkowita na jednostkę objętości.
 - Z parametrami tymi wiążą się dodatkowo:
 - $\mathbf{u} = \mathbf{m}/\rho$ – prędkość.
 - $\iota = e - 1/2\rho\mathbf{u}^2$ – energia wewnętrzna na jednostkę objętości.
- Wyrazić można przez nią:
- $p = (\gamma - 1)\iota$ – ciśnienie, gdzie $\gamma = 1.4$ ($\gamma = C_p/C_v$),
- $\theta = \iota/(C_v\rho)$ – temperaturę, gdzie C_v, C_p – ciepła właściwe przy stałej objętości i stałym ciśnieniu.
- $\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}$ – naprężenia lepkości wyrażające się przez:
 - $\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ – macierz prędkości odkształceń.
 - $q_i = -\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$ – strumień ciepła (prawo przewodnictwa Fouriera).
 - $\mu(\theta), \lambda(\theta)$ i $\kappa(\theta)$ – współczynniki lepkości i przewodnictwa cieplnego

- Przepływy spełniają zasady zachowania masy, pędu i energii wyrażające się następującymi równaniami:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m_j \\ e \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\begin{bmatrix} m_i \\ \frac{m_i m_j}{\rho} + \delta_{ij} p \\ \frac{m_i}{\rho} (e + p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_i(\mathbf{U})} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \tau_{ij} u_j - q_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_i^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

- Za pomocą zmiennych $\mathbf{U}$ i funkcji $\mathbf{F}_i(\mathbf{U})$ oraz $\mathbf{F}_i^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})$ możemy to zapisać krócej:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{U})}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{F}_i^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})}{\partial x_i}. \quad (10)$$

- Podobnie jak poprzednio stosujemy metodę różnic skończonych do aproksymacji w czasie:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \quad (11)$$

- Otrzymane równanie różnicowe w czasie mnożymy obustronnie przez Δt , funkcję testową $\mathbf{W}$ i całkujemy po obszarze obliczeniowym Ω :

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{U}^n)}{\partial x_i}}_{\mathbf{A}_i(\mathbf{U}^n)\mathbf{U}_{,i}^n} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_i^v(\mathbf{U}^{n+1}, \nabla \mathbf{U}^{n+1})}{\partial x_i}}_{[\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}^n)\mathbf{U}_{,j}^{n+1}]_{,i}} \Big/ \mathbf{W}^T, \int_{\Omega} \quad (12)$$

gdzie oznaczyliśmy $\partial \mathbf{F}_i / \partial \mathbf{U} = \mathbf{A}_i$ i $\mathbf{F}_i^v = \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,j}$.

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) dx + \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_i(\mathbf{U}^n) \mathbf{U}_{,i}^n dx = \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{W}^T [\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}^n) \mathbf{U}_{,j}^{n+1}]_{,i} dx$$

Całkując przez części ostatni wyraz oraz pozostawiając na lewej stronie tylko wyrazy z $\mathbf{U}^{n+1}$ otrzymujemy sformułowanie MES: $B(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{W}) = L(\mathbf{W})$.

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{U}^{n+1} dx + \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{W}_{,i}^T \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}^n) \mathbf{U}_{,j}^{n+1} dx}_{B(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{W})} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{U}^n dx - \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_i(\mathbf{U}^n) \mathbf{U}_{,i}^n dx - \Delta t \int_{\partial \Omega} \mathbf{W}^T [\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}^n) \mathbf{U}_{,j}^n] n_i dS}_{L(\mathbf{W})}$$

Elektromagnetyzm

- Do opisu pola elektromagnetycznego używamy następujących wielkości:

- $\mathbf{E}$ – natężenie pola elektrycznego $[V/m]$
- $\mathbf{H}$ – natężenie pola magnetycznego $[A/m]$
- $\mathbf{J}$ – gęstość strumienia prądu $[A/m^2]$, jest źródłem pola
- ϵ – przenikalność elektryczna F/m
- μ – przenikalność magnetyczna H/m
- σ – przewodność właściwa Ω^{-1}/m
- ω – częstość kołowa rad/s

- Definiujemy operator rotacji:

$$\nabla \times \mathbf{A} := \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \quad (13)$$

- Rozpatrujemy prawa Faradaya i Ampere'a:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}. \end{cases} \quad (14)$$

Elektromagnetyzm

- Do opisu pól zmiennych harmonicznie w czasie wygodnie jest stosować notację liczb zespolonych:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cos \omega t = \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{j\omega t}], \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cos \omega t = \operatorname{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{x}) e^{j\omega t}], \quad \text{gdzie } j = \sqrt{-1},\end{aligned}\tag{15}$$

gdyż różniczkowanie po t przechodzi w mnożenie przez $j\omega$:

$$\frac{d}{dt} [a(x) e^{j\omega t}] = j\omega a(x) e^{j\omega t}.\tag{16}$$

W praktyce stosuje się ten zapis z pomijaniem czynnika $e^{j\omega t}$.

- Równania Faradaya i Ampere'a z harmoniczną zmiennością w czasie przyjmują więc postać

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J} \end{cases}\tag{17}$$

- Warunki brzegowe przyjmowane w elektromagnetyzmie mają postać:

$$\mathbf{E}_t = \hat{\mathbf{E}}_t \text{ na } \partial\Omega_1, \quad \mathbf{H}_t = \hat{\mathbf{H}}_t \text{ na } \partial\Omega_2\tag{18}$$

gdzie $(\cdot)_t$ oznacza składową styczną do brzegu $\partial\Omega$, zaś $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}$ są dane.

Elektromagnetyzm

- Za pomocą jednego z równań, np. z równania Faradaya, możemy wyrugować zmienną $\mathbf{H}$ i wstawić ją do pozostałego równania:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \implies \nabla \times \frac{-1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = j\omega\epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (19)$$

Po pomnożeniu przez $\frac{1}{\mu}$ i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma) \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{J} \quad (20)$$

- Mnożymy to równanie obustronnie przez funkcję testową $\mathbf{F}$ oraz całkujemy po obszarze obliczeniowym Ω .

$$\int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} dx - \int_{\Omega} (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma) \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} dx = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{F} dx \quad (21)$$

- W końcu całkując pierwszy wyraz przez części otrzymujemy sformułowanie wariacyjne: Znaleźć $\mathbf{E}$ takie że $\mathbf{E}_t = \hat{\mathbf{E}}_t$ na $\partial\Omega_1$ oraz

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma) \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} dx}_{B(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = L(\mathbf{F})} = \underbrace{-j\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{F} dx + j\omega \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_t \cdot \mathbf{F} dS}_{(*)}, \quad \forall \mathbf{F} \times \mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega_1$$