

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Funkcje kształtu w 2D: element czworokątny.

Element parametryczny

Czworokątny element wzorcowy Lagrange'a

- Podobnie jak w 1D definiujemy elementowe funkcje kształtu dwustopniowo.
- W pierwszym kroku konstruujemy te funkcje na elemencie wzorcowym, w drugim zaś na faktycznych elementach siatki skończenie elementowej.
- W praktyce wykorzystuje się elementy trójkątne i czworokątne. W dalszej części wykładu przedstawiamy element czworokątny.

Czworokątny element wzorcowy Lagrange'a

- Wybieramy obszar czworokątnego elementu wzorcowego $\hat{K}$ jako kwadrat jednostkowy $\hat{K} = [0, 1]^2$. Rozmieszczamy w nim równomiernie węzły w $p + 1$ rzędach pionowych i poziomych:

$$\begin{aligned}\xi^{ij} &= (\xi_1^i, \xi_2^j), \quad i, j = 1, \dots, p + 1, \quad \text{gdzie} \\ \xi_k^i &= \frac{i - 1}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, p + 1, \quad k = 1, 2,\end{aligned}\tag{1}$$

są współrzędnymi rzędów węzłów, por. rysunek.

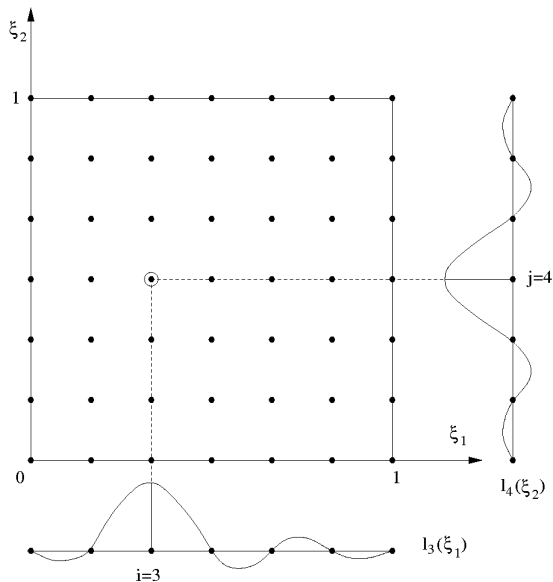
- Naszym celem jest skonstruowanie wielomianów o takiej własności, że każdy z nich przyjmuje wartość 1 tylko w jednym z węzłów a w pozostałych znika. Funkcje takie łatwo zapiszemy za pomocą jednowymiarowych wielomianów Lagrange'a $\hat{l}_i(\xi)$ stopnia p (oznaczanych wcześniej przez $\hat{\psi}_i$):

$$\hat{\psi}_{ij}(\xi_1, \xi_2) = \hat{l}_i(\xi_1) \hat{l}_j(\xi_2), \quad i, j = 1, 2, \dots, p + 1.\tag{2}$$

Sprawdzamy, że faktycznie każda z funkcji $\hat{\psi}_{ij}$ przyjmuje wartość 1 tylko w jednym z węzłów identyfikowanym przez indeksy (i, j) :

$$\hat{\psi}_{ij}(\xi^{kl}) = \hat{l}_i(\xi_1^k) \hat{l}_j(\xi_2^l) = \delta_{ik} \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = k \text{ i } j = l, \\ 0 & \text{gdy } i \neq k \text{ lub } j \neq l. \end{cases}\tag{3}$$

Czworokątny element wzorcowy



Czworokątny element wzorcowy

- Przykład: $p = 1$, $\xi_i^1 = 0$, $\xi_i^2 = 1$.

Jednowymiarowe wielomiany Lagrange'a stopnia $p = 1$:

$$\hat{l}_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \hat{l}_2(\xi) = \xi$$

Funkcje kształtu na czworokącie (tzw. **biliniowe** funkcje kształtu):

$$\hat{\psi}_{1,1} = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad \hat{\psi}_{1,2} = (1 - \xi_1)\xi_2$$

$$\hat{\psi}_{2,1} = \xi_1(1 - \xi_2) \quad \hat{\psi}_{2,2} = \xi_1\xi_2$$

- Przykład: $p = 4$, $\{\xi_i^j\}_{j=1}^5 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Jednowymiarowe wielomiany Lagrange'a:

$$\hat{l}_2(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})(\xi - \frac{3}{4})(\xi - 1)}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - 1)}, \quad \hat{l}_4(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{4})(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{3}{4} - 1)}$$

Funkcja kształtu $\hat{\psi}_{2,4}$:

$$\hat{\psi}_{2,4}(\xi_1, \xi_2) = \frac{(\xi_1 - 0)(\xi_1 - \frac{1}{2})(\xi_1 - \frac{3}{4})(\xi_1 - 1)}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - 1)} \cdot \frac{(\xi_2 - 0)(\xi_2 - \frac{1}{4})(\xi_2 - \frac{1}{2})(\xi_2 - 1)}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{3}{4} - 1)}$$

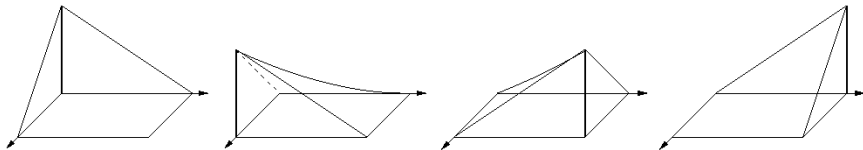
Czworokątny element wzorcowy

- Liczba zdefiniowanych tak wielomianów wynosi $(p+1)^2$ i jest większa niż wymiar przestrzeni wielomianów $\mathcal{P}^p$ stopnia p na płaszczyźnie $(p+1)(p+2)/2$. Ich przestrzeń oznaczamy symbolem $\mathcal{Q}^p$. Zawiera ona w sobie wielomiany $\mathcal{P}^p$.
- W zastosowaniach wygodnie jest dokonać renumeracji wielomianów $\hat{\psi}_{ij}$ za pomocą jednego wskaźnika, na przykład według reguły:

$$(i, j) \rightarrow k = (j-1)(p+1) + i, \quad i, j = 1, 2, \dots, p+1. \quad (4)$$

- Rysunek przedstawia funkcje kształtu stopnia $p=1$, tj. funkcje biliniowe (które ponumerowano zgodnie z przeciwnym ruchem wskazówek zegara):

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2), & \hat{\psi}_2 &= \xi_1(1 - \xi_2), \\ \hat{\psi}_3 &= \xi_1\xi_2, & \hat{\psi}_4 &= (1 - \xi_1)\xi_2. \end{aligned} \quad (5)$$



Element parametryczny

- Aby zdefiniować elementy siatki pokrywającej zwykle krzywoliniowy obszar obliczeniowy Ω , każdy z nich tworzymy jako obraz elementu wzorcowego w pewnym odwzorowaniu T_K , por. rysunek.
- Najbardziej popularną jego definicją jest koncept określany jako **element parametryczny**. Odwzorowanie T_K jest zdefiniowane jako kombinacja liniowa funkcji kształtu na elemencie wzorcowym z pewnymi współczynnikami wektorowymi $\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, n$:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}), \quad (6)$$

gdzie $\hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi})$ są odpowiednio ponumerowanymi funkcjami kształtu czworokąta lub trójkąta wzorcowego, a n oznacza ich liczbę (równą liczbie węzłów elementu).

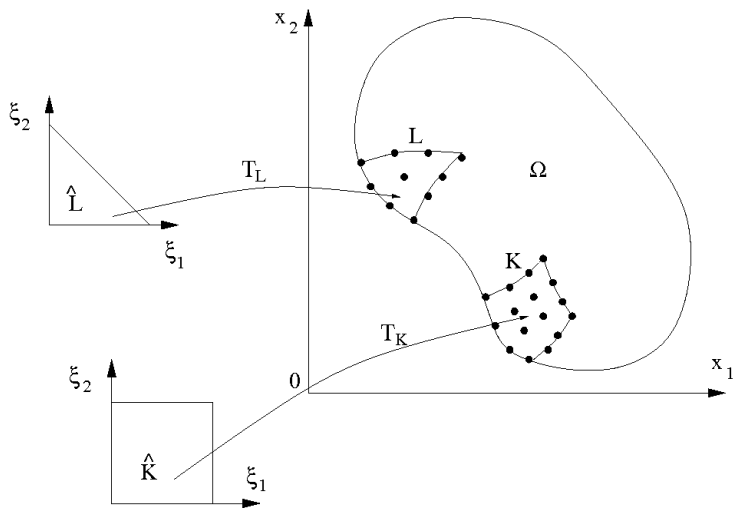
- Współczynniki $\mathbf{x}^i$ mają prostą interpretację: są to współrzędne punktów będących obrazami węzłów $\boldsymbol{\xi}^j$ na elemencie wzorcowym:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}^j) = \mathbf{x}^j. \quad (7)$$

Przyjmujemy, że są to węzły elementu rzeczywistego K .

Element parametryczny

- Odwzorowanie elementów wzorcowych w rzeczywiste elementy siatki.



- Sprawdzimy, że jeśli sąsiednie elementy siatki mają wspólne węzły, to boki elementów zawierających te węzły pokrywają się i mają identyczny opis parametryczny. Weźmy przykładowo elementy K i L na następnym rysunku.

- Niech ich odwzorowania mają postać

$$T_K : \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}^i, \quad T_L : \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}^i, \quad (8)$$

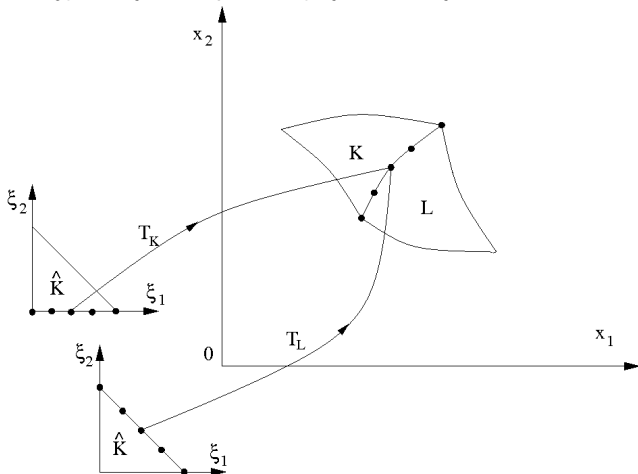
gdzie $N = (p+1)(p+2)/2$ jest liczbą stopni swobody.

- Niech wspólne węzły mają współrzędne $\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, p+1$. Odpowiadają one węzłom elementu K na brzegu będącym obrazem poziomej przyprostokątnej $\hat{K}$, $(\xi_1, \xi_2) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$ i punktom $t_i = (i-1)/p, i = 1, p+1$.
- Dla elementu L niech węzły $\mathbf{x}^i$ odpowiadają przeciwprostokątnej $\hat{K}$, $(\xi_1, \xi_2) = (1-t, t)$, $t \in [0, 1]$ oraz punktom $t_i = (i-1)/p, i = 1, p+1$.
- Funkcja kształtu elementu K związana z węzłem $\mathbf{x}^i$ (i punktem t_i) jako funkcja parametru t jest wielomianem Lagrange'a $\hat{l}_i(t)$: jest ona wielomianem stopnia p (jako obcięcie do odcinka dwuwymiarowego wielomianu stopnia p), który znika dla argumentów $t_j, j = 1, \dots, p+1$ poza punktem t_i , w którym ma wartość 1.
- Analogiczne stwierdzenie dotyczy funkcji kształtu elementu L związanej z węzłem $\mathbf{x}^i$.

- Wobec tego zarówno T_K jak i T_L wyrażają się wzorem:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{p+1} \hat{l}_i(t) \mathbf{x}^i, \quad t \in [0, 1], \quad \text{gdzie } \mathbf{x}^i \text{ to kolejne węzły na wspólnym boku,}$$

co oznacza, że elementy ani na siebie nie zachodzą, ani nie ma między nimi przerw, mają nie tylko wspólne węzły, ale i cały bok.



Alternatywnie: dla elementów czworokątnych

- Sprawdzimy, że jeśli sąsiednie elementy siatki mają wspólne węzły, to boki elementów zawierających te węzły pokrywają się i mają identyczny opis parametryczny. Weźmy przykładowo elementy K i L .
- Niech ich odwzorowania mają postać

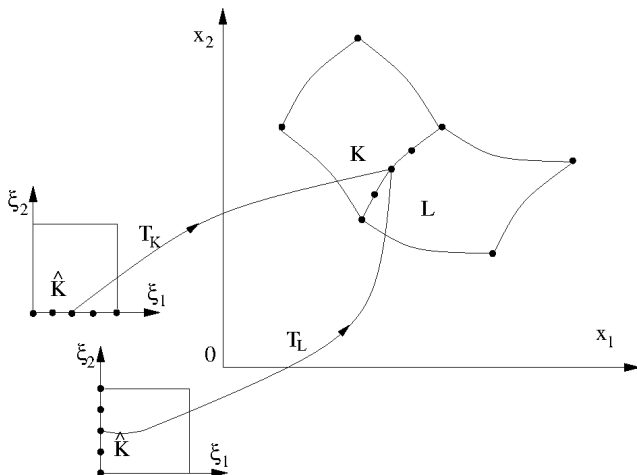
$$T_K : \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}^i, \quad T_L : \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}^i, \quad (9)$$

gdzie $N = (p+1)^2$ jest liczbą stopni swobody.

- Niech wspólne węzły mają współrzędne $\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, p+1$.
- Załóżmy, że odpowiadają one węzłom elementu K na brzegu będącym obrazem dolnego poziomego boku $\hat{K}$, $(\xi_1, \xi_2) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$ i punktom $t_i = (i-1)/p$, $i = 1, p+1$.
- Funkcja kształtu elementu $\hat{K}$ na tym boku, związana z węzłem $\mathbf{x}^i$ (i z punktem t_i) jako funkcja parametru t jest wielomianem Lagrange'a:
 $\hat{l}_i(\xi_1)_{\xi_1=t} \cdot \hat{l}_1(0) = \hat{l}_i(t).$

Alternatywnie: dla elementów czworokątnych

- Ciągłość siatki.



Alternatywnie: dla elementów czworokątnych

- Dla elementu L niech wspólny bok odpowiada np. np. lewemu pionowemu bokowi elementu wzorcowego $\hat{K}$, $(\xi_1, \xi_2) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$ oraz punktom $t_i = (i - 1)/p$, $i = 1, p + 1$.
- Analogicznie znajdujemy, że funkcja kształtu elementu $\hat{L}$ związana z węzłem x^i jest też wielomianem Lagrange'a: $\hat{l}_1(0) \cdot \hat{l}_i(\xi_2)_{\xi_2=t} = \hat{l}_i(t)$.
- Wobec tego odwzorowania zarówno T_K jak i T_L wyrażają się tym samym wzorem:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p+1} \hat{l}_i(t) x^i, \quad t \in [0, 1], \quad \text{gdzie } x^i \text{ to kolejne węzły na wspólnym boku,}$$

co oznacza, że elementy ani na siebie nie zachodzą, ani nie ma między nimi przerw, mają nie tylko wspólne węzły, ale i cały bok.

Funkcje kształtu na elemencie rzeczywistym

- Definiujemy funkcje kształtu na elemencie rzeczywistym K jako złożenie funkcji kształtu na elemencie wzorcowym oraz odwzorowania T_K^{-1} :

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})), \quad (10)$$

gdzie $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ jest transformacją T_K^{-1} . Element definiowany przez $T_K: \hat{K} \rightarrow K$ i wyposażony w funkcje kształtu powyższej postaci nazywamy **elementem parametrycznym**.

- Definiujemy globalną funkcję kształtu $\phi_i(\mathbf{x})$ jako funkcję, która przyjmuje wartość 1 w węźle $\mathbf{x}^i$ siatki, znika we wszystkich pozostałych, a jej ograniczenia do elementów są ich elementowymi funkcjami kształtu:

$$\phi_i(\mathbf{x})|_K = \psi_m(\mathbf{x}). \quad (11)$$

- Biorąc pod uwagę dwa sąsiednie elementy K i L o wspólnym boku oraz globalną funkcję kształtu związaną ze wspólnym węzłem $\mathbf{x}^i$ i elementowe funkcje kształtu ψ_m^K w K oraz ψ_n^L w L na nią się składające, widzimy, że funkcje te mają identyczne wartości wzdłuż całego wspólnego boku:

$$\underbrace{\psi_m^K(\mathbf{x}(t))}_{\hat{\psi}_m(t,0)=\hat{l}_i(t)} = \underbrace{\psi_n^L(\mathbf{x}(t))}_{\hat{\psi}_n(0,t)=\hat{l}_i(t)} = \hat{l}_i(t), \quad t \in [0, 1], \quad (\mathbf{x}(t) - \text{str. poprzednia}).$$

- Oznacza to, że globalne funkcje kształtu $\phi_i(\mathbf{x})$ są **ciągłe**.