

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Funkcje kształtu w 2D: element trójkątny

Trójkątny element wzorcowy Lagrange'a

- Podobnie jak w 1D definiujemy elementowe funkcje kształtu dwustopniowo. W pierwszym kroku konstruujemy te funkcje na elemencie wzorcowym, w drugim zaś na faktycznych elementach siatki skończenie elementowej. W praktyce wykorzystuje się elementy trójkątne i czworokątne.
- Jako wzorcowy element trójkątny przyjmujemy trójkąt prostokątny o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Do określenia funkcji kształtu na trójkącie użyteczne jest wprowadzenie współrzędnych połowych. Dla dowolnego punktu D są to trzy liczby $\zeta_i, i = 1, 2, 3$ zdefiniowane za pomocą pól S_1, S_2 i S_3 trójkątów ABD, BCD i CAD :

$$\zeta_i = \frac{S_i}{S}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

gdzie $S = S_1 + S_2 + S_3$, por. rysunek.

- Współrzędne te nie są niezależne, gdyż:

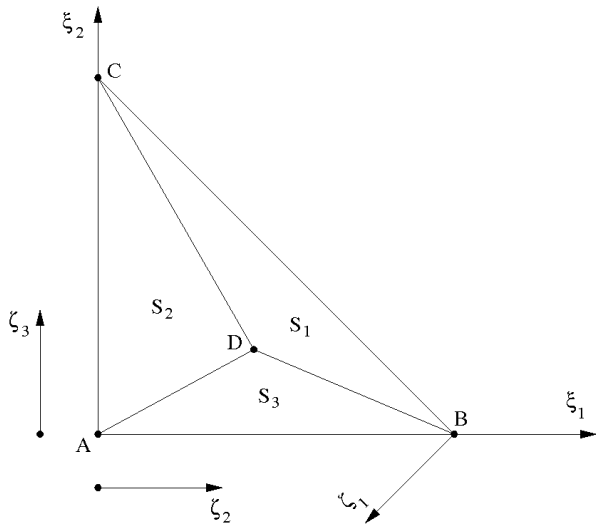
$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = (S_1 + S_2 + S_3)/S = 1. \quad (2)$$

- Dla trójkąta wzorcowego współrzędne połowe wiążą się ze współrzędnymi kartezjańskimi ξ_1, ξ_2 następująco:

$$\zeta_2 = \xi_1, \quad \zeta_3 = \xi_2, \quad \zeta_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2. \quad (3)$$

Trójkątny element wzorcowy

- Współrzędne polowe $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.



- Definiujemy zbiór równomiernie rozłożonych węzłów na trójkącie:

$$\xi_1^i = \frac{i-1}{p}, \quad \xi_2^j = \frac{j-1}{p}, \quad i, j = 1, \dots, p+1, \quad 2 \leq i+j \leq p+2, \quad (4)$$

gdzie $p \geq 1$ jest liczbą węzłów na każdym z boków trójkąta. Odpowiadają im współrzędne połowe:

$$\zeta_2^i = \frac{i-1}{p}, \quad \zeta_3^j = \frac{j-1}{p}, \quad \zeta_1^k = \frac{k-1}{p}, \quad 1 \leq i, j, k \leq p+1, \quad i+j+k = p+3.$$

Zauważmy, że parametry i, j, k odpowiadają numerom rzędów węzłów obliczanych wzdłuż osi ζ_1, ζ_2 i ζ_3 , por. rysunek.

- Chcielibyśmy zapisać wielomian zmiennych $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, który w wybranym węźle i, j, k przyjmuje wartość 1 a w pozostałych znika. W tym celu oznaczymy położenia rzędów węzłów wzdłuż osi ζ_n :

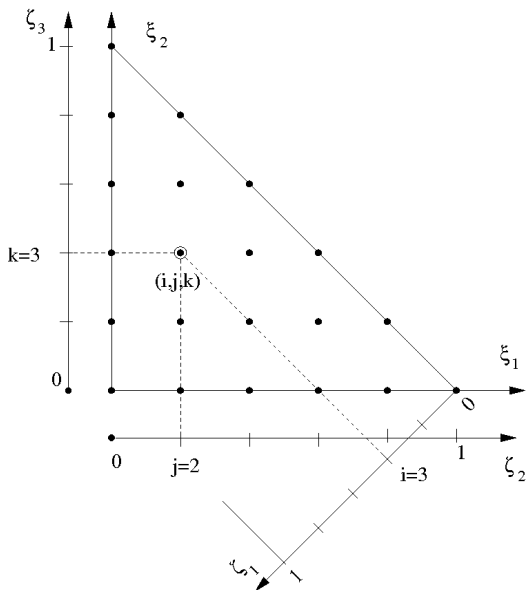
$$\zeta_n^m = \frac{m-1}{p}, \quad m = 1, \dots, p+1, \quad n = 1, 2, 3. \quad (5)$$

- Wyrażenie postaci:

$$(\zeta_1 - \zeta_1^1) \dots (\zeta_1 - \zeta_1^{i-1}) \cdot (\zeta_2 - \zeta_2^1) \dots (\zeta_2 - \zeta_2^{j-1}) \cdot (\zeta_3 - \zeta_3^1) \dots (\zeta_3 - \zeta_3^{k-1})$$

znika w węzłach leżących w rzędach poprzedzających rzędy i, j, k , tj. we wszystkich węzłach prócz wyróżnionego wskaźnikami i, j, k , por. rysunek.

Siatka węzłów



Element trójkątny Lagrange'a

- Wyrażenie to jest wielomianem stopnia $i - 1 + j - 1 + k - 1 = p$ ze względu na zmienne ξ_1 i ξ_2 , od których każdy z takiej właśnie liczby czynników zależy liniowo.
- Aby wielomian ten przyjmował wartość 1 w węźle i, j, k wystarczy to wyrażenie podzielić przez jego wartość w tymże węźle o współrzędnych $\zeta_1^i, \zeta_2^j, \zeta_3^k$:

$$\chi_{ijk} =$$

$$\frac{(\zeta_1 - \zeta_1^1) \dots (\zeta_1 - \zeta_1^{i-1}) \cdot (\zeta_2 - \zeta_2^1) \dots (\zeta_2 - \zeta_2^{j-1}) \cdot (\zeta_3 - \zeta_3^1) \dots (\zeta_3 - \zeta_3^{k-1})}{(\zeta_1^i - \zeta_1^1) \dots (\zeta_1^i - \zeta_1^{i-1}) \cdot (\zeta_2^j - \zeta_2^1) \dots (\zeta_2^j - \zeta_2^{j-1}) \cdot (\zeta_3^k - \zeta_3^1) \dots (\zeta_3^k - \zeta_3^{k-1})}.$$

- Otrzymane wielomiany są liniowo niezależne (aby stworzyć ich kombinację liniową równą zero, jej współczynniki muszą zniknąć bo każdy odpowiada za wartość w jednym węźle). Ich liczba wynosi:

$$1 + 2 + \dots + (p + 1) = \frac{(p + 1)(p + 2)}{2}, \quad (6)$$

co pokrywa się z wymiarem przestrzeni wielomianów stopnia p na płaszczyźnie. Wielomiany χ_{ijk} tworzą więc bazę tej przestrzeni.

Przykłady: $p = 1$

- Element liniowy $p = 1$. Liczba węzłów wynosi:

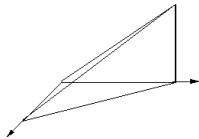
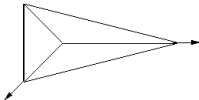
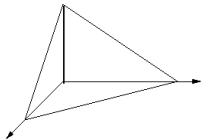
$$\frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3. \quad (7)$$

Położenia rzędów węzłów:

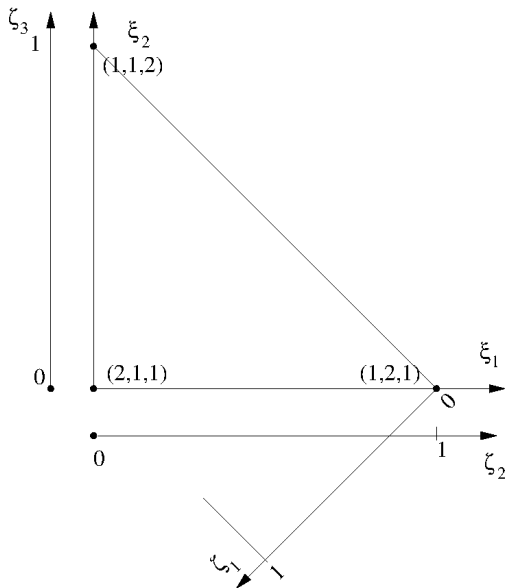
$$\zeta_n^i = \frac{i-1}{1}, \quad i = 1, 2, \quad \text{tzn.} \quad \zeta_n^1 = 0, \zeta_n^2 = 1. \quad (8)$$

Kolejne funkcje kształtu dla $i + j + k \leq p + 3 = 1 + 3 = 4$ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \chi_{112} &= \frac{\zeta_3 - \zeta_3^1}{\zeta_3^2 - \zeta_3^1} = \zeta_3 = \xi_2, \\ \chi_{121} &= \frac{\zeta_2 - \zeta_2^1}{\zeta_2^2 - \zeta_2^1} = \zeta_2 = \xi_1, \\ \chi_{211} &= \frac{\zeta_1 - \zeta_1^1}{\zeta_1^2 - \zeta_1^1} = \zeta_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2. \end{aligned} \quad (9)$$



Element trójkątny $p = 1$



Element trójkątny drugiego stopnia ($p = 2$)

- Przykład $p = 2$. Liczba węzłów:

$$\frac{(2+1)(2+2)}{2} = 6. \quad (10)$$

Położenia rzędów węzłów:

$$\zeta_n^i = \frac{i-1}{2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{tzn.} \quad \zeta_n^1 = 0, \quad \zeta_n^2 = \frac{1}{2}, \quad \zeta_n^3 = 1. \quad (11)$$

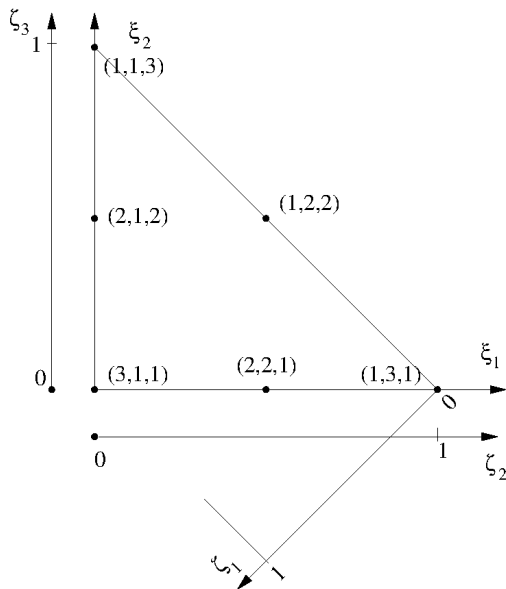
Kolejne funkcje kształtu dla $i + j + k \leq p + 3 = 2 + 3 = 5$ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \chi_{113} &= \frac{(\zeta_3 - 0)(\zeta_3 - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})}, \quad \chi_{131} = \frac{(\zeta_2 - 0)(\zeta_2 - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})}, \quad \chi_{311} = \frac{(\zeta_1 - 0)(\zeta_1 - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})}, \\ \chi_{221} &= \frac{(\zeta_1 - 0)(\zeta_2 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 0)}, \quad \chi_{212} = \frac{(\zeta_1 - 0)(\zeta_3 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 0)}, \quad \chi_{122} = \frac{(\zeta_2 - 0)(\zeta_3 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 0)}. \end{aligned}$$

Trzy pierwsze z wymienionych funkcji są związane z węzłami narożnymi trójkąta, trzy ostatnie ze środkami boków.

Element nie ma węzła wewnętrznego.

Element trójkątny $p = 2$



Element trójkątny stopnia $p = 5$

- Przykład $p = 5$ (patrz rys. z węzłami trójkąta). Liczba węzłów:

$$\frac{(5+1)(5+2)}{2} = 21. \quad (12)$$

Położenia rzędów węzłów:

$$\zeta_n^i = \frac{i-1}{5}, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad \text{tzn.} \quad \{\zeta_n^i\} = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}. \quad (13)$$

Przedstawmy wybrane funkcje kształtu dla $i + j + k \leq p + 3 = 5 + 3 = 8$.

Funkcja związana z rogiem $\xi = (1, 0)$ lub $\zeta = (0, 1, 0)$:

$$\chi_{1,6,1} = \frac{(\zeta_2 - 0)(\zeta_2 - \frac{1}{5})(\zeta_2 - \frac{2}{5})(\zeta_2 - \frac{3}{5})(\zeta_2 - \frac{4}{5})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{2}{5})(1 - \frac{3}{5})(1 - \frac{4}{5})} \quad (14)$$

Funkcja związana węzłem wewnętrznym dolnego boku, $\xi = (\frac{2}{5}, 0)$ lub $\zeta = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0)$

$$\chi_{4,3,1} = \frac{(\zeta_1 - 0)(\zeta_1 - \frac{1}{5})(\zeta_1 - \frac{2}{5})(\zeta_2 - 0)(\zeta_2 - \frac{1}{5})}{(\frac{3}{5} - 0)(\frac{3}{5} - \frac{1}{5})(\frac{3}{5} - \frac{2}{5})(\frac{2}{5} - 0)(\frac{2}{5} - \frac{1}{5})} \quad (15)$$

Element trójkątny stopnia $p = 5$

- Węzły wewnętrzne:

funkcja związana z węzłem wewnętrznym elementu $\xi = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ lub $\zeta = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$:

$$\chi_{3,2,3} = \frac{(\zeta_1 - 0)(\zeta_1 - \frac{1}{5})(\zeta_2 - 0)(\zeta_3 - 0)(\zeta_3 - \frac{1}{5})}{(\frac{2}{5} - 0)(\frac{2}{5} - \frac{1}{5})(\frac{1}{5} - 0)(\frac{2}{5} - 0)(\frac{2}{5} - \frac{1}{5})}, \quad (16)$$

funkcja związana z węzłem wewnętrznym elementu $\xi = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ lub $\zeta = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$:

$$\chi_{2,4,2} = \frac{(\zeta_1 - 0)(\zeta_2 - 0)(\zeta_2 - \frac{1}{5})(\zeta_2 - \frac{2}{5})(\zeta_3 - 0)}{(\frac{1}{5} - 0)(\frac{3}{5} - 0)(\frac{3}{5} - \frac{1}{5})(\frac{3}{5} - \frac{2}{5})(\frac{1}{5} - 0)}. \quad (17)$$

- Przedstawione funkcje kształtu programuje się w postaci pozwalającej na najbardziej efektywne obliczenia.
- Dodatkowo do obliczeń elementowych konieczna jest znajomość pierwszych pochodnych przedstawionych wielomianów.

Element trójkątny $p = 1$

